

~ DEVOIR SURVEILLÉ 2 ~ ARITHMÉTIQUE

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

(10 points)

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $3m + 11$ par 26 et on le note p .

Etape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Trouver un nombre entier x tel que $3x \equiv 1 \pmod{26}$.
3. En déduire que pour tout entier m on a $27m - 5 \equiv m - 5 \pmod{26}$
4. Démontrer alors l'équivalence :

$$3m + 11 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 9p + 5 \pmod{26}.$$

5. Décoder alors la phrase J GLWX L UKXLV.

Exercice 2.

(4 points)

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Congruence de $4^n \pmod{11}$								
Congruence de $3^n \pmod{11}$								

2. Démontrer que $4^{5n} - 3^{5n}$ est divisible par 11 pour tout entier naturel n .

Exercice 3.

(Question Cactus)

On souhaite résoudre le problème suivant :

Combien l'armée de Han Xing comporte-t-elle de soldats au minimum si, rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangés par 5 colonnes il reste trois soldats, et rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ?