

∞ DEVOIR MAISON 7 ∞ CONGRUENCE

Exercice 1.



Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.

On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a ; b)$ vérifiant la relation :

$$(E) \quad a^2 - 250507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
 - (a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
 - (b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2 .
 - (c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E), alors $a > 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501 ; b)$.
3. On suppose que le couple $(a ; b)$ vérifie la relation (E).
 - (a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
 - (b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k ; b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
4. Déduire des questions précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.