

∞ DEVOIR MAISON 1 ∞ SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Problème : Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à ailette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.

On suppose que la population u lors de l'année n de Schblurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n . Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite u pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et des paramètres a et b .

On cherche à estimer la population de Schblurbs dans l'avenir lointain, par deux techniques différentes dont l'une utilise la suite auxiliaire suivante :

la suite v est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

On se place dans le cas où

$$u_0 = 0,3 \quad a = -0,5 \quad \text{et} \quad b = 7$$

- Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
- Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u .
 - Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u .
 - Déterminer cette limite par le calcul.
- Vérifier que, pour tout entier n , on a :

$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

- Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
- Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire que

$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

- En déduire la limite ℓ de la suite u . Conclure.