∾ DEVOIR MAISON 18 ∾
CALCUL DE PGCD

Exercice 1. Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant ;

« Etant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a;b) = 1$ alors PGCD$(a^2;b^2) = 1$ ».

Une suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour $n > 0$ par :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} p^3$$

On se propose de calculer, pour tout entier naturel n le plus grand diviseur commun entre S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n > 0$, on a :

$$\mathrm{S}_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2. Etude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
   (a) Démontrer que PGCD$(\mathrm{S}_{2k};\mathrm{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD$(k^2;(k+1)^2)$.
   (b) Calculer PGCD$(k;k+1)$.
   (c) Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k};\mathrm{S}_{2k+1})$.
3. Etude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
4. (a) Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   (b) Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k+1};\mathrm{S}_{2k+2})$
5. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
   Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
   (b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
   (a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
   (b) On suppose u et v strictement positifs.
   Montrer que : $\left(a^{mu}-1\right) - \left(a^{nv}-1\right)a^d = a^d - 1$.
   Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
   (c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.