

≈ DEVOIR MAISON 17 ≈ EQUATION DE PELL-FERMAT

Le but de l'exercice est de déterminer des couples (a, b) d'entiers vérifiant l'égalité

$$(1) : a^2 - 2b^2 = 1$$

1. On suppose que (a, b) est solution.
 - (a) Prouver que a est impair.
 - (b) En déduire que $a^2 - 1$ est un multiple de 4 puis que b est pair.
 - (c) Montrer que a et b sont premiers entre eux.
2.
 - (a) Déterminer une solution évidente de l'équation (1).
 - (b) Montrer que si (a, b) est solution de (1), le couple $(3a + 4b, 2a + 3b)$ l'est également.
 - (c) Déterminer 3 autres solutions de (1).
3.
 - (a) Ecrire un algorithme qui affiche un couple d'entiers supérieurs à 1000 vérifiant (1).
 - (b) Le programmer sur une calculatrice ou sur un logiciel de votre choix.
Quel couple affiche-t-il ?



Infos Mathématiques

L'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ est dite de « Pell-Fermat ». Plus généralement, on appelle ainsi une équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où x et y sont des entiers inconnus et d un entier naturel sans facteur carré. Fermat a montré qu'elle admet une infinité de solutions.