∾ Devoir Maison 16 ∾
Objectif Bac

Ce devoir maison est facultatif et « à la carte ». C'est à dire que chaque élève traitera les exercices de son choix. Le dernier délai pour me rendre votre travail est le vendredi 7 février car sinon je n'aurai pas le temps de corriger. Il est bien évident que je ne peux pas en un seul devoir mettre toutes les notions donc il faut aussi réviser par vous même...

Exercice 1. **Exponentielle et suite (vous en avez rêvé...)**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   (b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n\mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n > 0$$

   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = v_n\mathrm{e}^{-v_n}$$

   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

Exercice 2. **Des complexes**

Pour tout point P, on convient de noter son affixe z_P.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(E) : z^3 + 8 = 0$$
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z,
$$z^3 + 8 = (z+2)(z^2 + az + b)$$
   (b) Résoudre alors l'équation (E) (on donnera les solutions sous leur forme algébrique).
   (c) Ecrire ces solutions sous leur forme exponentielle.
2. On considère les points $A(-2)$, $B(1 - i\sqrt{3})$, $C(1 + i\sqrt{3})$ et D le milieu du segment [OB].
   (a) Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure.
   (b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
   (c) Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.
   (d) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont orthogonaux.
   (e) En déduire que L appartient au cercle de diamètre [OA].
   (f) Placer alors L sur la figure.

Exercice 3. **Des probabilités**

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
   On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».
   Montrer que les évènements P et T sont indépendants.
2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.
   (a) On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$.
   (b) On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p_{T_1}(T_2)$, puis $p_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right)$.
   (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)
   (c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.
3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
   Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.