Devoir Surveillé 1
Repérage et (in)équations

Exercice 1 : Des milieux **4 points**

Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, placer les points $A(2, 1)$, $B(0; 2)$ et $C(-4; -3)$.

1. $x_M = \dfrac{x_B + x_A}{2} = \ldots = 1$ et $y_M = \dfrac{y_B + y_A}{2} = \ldots = \dfrac{3}{2}$ Donc $M\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$
2. $x_N = \dfrac{x_C + x_A}{2} = \ldots = -1$ et $y_N = \dfrac{y_C + y_A}{2} = \ldots = -1$ Donc $N(-1; -1)$
3. On note $P(x; y)$. Le point A doit être le milieu de [BP], donc on doit avoir :
   $x_A = \dfrac{x_P + x_B}{2}$ c'est-à-dire $2 = \dfrac{x+0}{2}$ c'est-à-dire $4 = x$
   $y_A = \dfrac{y_P + y_B}{2}$ c'est-à-dire $1 = \dfrac{y+2}{2}$ c'est-à-dire $2 = y + 2 \iff 0 = y$ Donc $P(4, 0)$.
4. Si Q est le symétrique de A par rapport à B alors B est le milieu de [AQ]. On note $Q(x; y)$. Alors on doit avoir :
   $x_B = \dfrac{x_Q + x_A}{2}$ c'est-à-dire $0 = \dfrac{x+2}{2}$ c'est-à-dire $0 = x + 2 \iff x = -2$
   $y_B = \dfrac{y_Q + y_A}{2}$ c'est-à-dire $2 = \dfrac{y+1}{2}$ c'est-à-dire $4 = y + 1 \iff 3 = y$ Donc $Q(-2, 3)$.
5. Contrôler vos résultats à l'aide du figure (unité graphique : OI = 1 cm).

Exercice 2 : Des milieux, des distances et un quadrilatère **6 points**

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1; -1)$, $B(3; -3)$, $C(4; -1)$ et $D(0; 1)$.

1. On sait que **si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux, alors c'est un parallélogramme**.
   Il s'agit donc de vérifier que les diagonales de ABCD se coupent en leur milieux.
   Le milieu de [AC] a pour coordonnées : $x = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \ldots = \dfrac{3}{2}$ et $y = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \ldots = -1$
   Le milieu de [BD] a pour coordonnées : $x = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \ldots = \dfrac{3}{2}$ et $y = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \ldots = -1$
   Il s'agit du même point : le quadrilatère ABCD a donc ses diagonales qui se coupent en leurs milieux, c'est donc un parallélogramme.

2. On sait que

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (3 - (-1))^2 + (-3 - (-1))^2 \\ &= (4)^2 + (-2)^2 \\ AB^2 &= 16 + 4 \\ AB &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\begin{aligned} AD^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 \\ &= (0 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2 \\ &= (1)^2 + (2)^2 \\ AD^2 &= 1 + 4 \\ AD &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

4. ABCD n'a pas deux côtés consécutifs de même longueur, ce n'est donc pas un losange.
5. On sait que **si un quadrilatère est un parallélogramme avec un angle droit, alors c'est un rectangle.**
   On sait déjà que ABCD est un parallélogramme. Il s'agit donc de vérifier qu'il possède un angle droit.
   Pour cela, plaçons nous dans le triangle ABD et regardons s'il est rectangle, grâce à **Pythagore**.
   On sait déjà que $AB^2 = 20$ et $AD^2 = 5$. Calculons BD^2. On a

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ &= (0 - 3)^2 + (1 - (-3))^2 \\ &= (-3)^2 + (4)^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

On constate que $BD^2 = AB^2 + AD^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A.
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme avec un angle droit : c'est un rectangle.

6. Le quadrilatère ABCD n'est pas un losange, cela ne peut donc pas être un carré.

<u>Exercice 3</u> : Des équations — 4 points

1. $5x+1=3 \overset{-1}{\iff} 5x=3-1=2 \overset{\div 5}{\iff} x=\dfrac{2}{5}$ $\qquad \mathscr{S}=\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

2. $3-4x=-1 \overset{-3}{\iff} -4x=-1-3=-4 \overset{\div(-4)}{x} = \dfrac{-4}{-4}=1$ $\qquad \mathscr{S}=\{1\}$

3.
$$\begin{aligned}(5x+2)(4-3x)=0 &\iff 5x+2=0 \text{ ou } 4-3x=0\\ &\iff 5x=-2 \quad \text{ou } -3x=-4\\ &\iff x=-\frac{2}{5} \quad \text{ou } x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$
$\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{3}\right\}$

4.
$$\begin{aligned}-2x(4x+1)=0 &\iff -2x=0 \text{ ou } 4x+1=0\\ &\iff x=\frac{0}{-2} \text{ ou } 4x=-1\\ &\iff x=0 \quad \text{ou } x=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$
$\mathscr{S}=\left\{0;-\dfrac{1}{4}\right\}$

<u>Exercice 4</u> : Des inéquations — 4 points

1. $0\leq 3x\leq 3 \overset{\div 3}{\iff} \dfrac{0}{3}\leq x\leq \dfrac{3}{3} \iff 0\leq x\leq 1$ $\qquad \mathscr{S}=[0;1]$

2. $-3<3+4x\leq -1 \overset{-3}{\iff} -6<4x\leq -4 \overset{\div 4}{\iff} \dfrac{-6}{4}<x\leq\dfrac{-4}{4} \iff -\dfrac{3}{2}<x\leq -1$ $\qquad \mathscr{S}=\left]-\dfrac{3}{2};-1\right]$

3. $2x-1<-4 \overset{+1}{\iff} 2x<-3 \overset{\div 2}{\iff} x<-\dfrac{3}{2}$ $\qquad \mathscr{S}=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$

4. $4<3-x \overset{-3}{\iff} 1<-x \overset{\times(-1)}{\iff} -1>x$ $\qquad \mathscr{S}=]-\infty;-1[$

<u>Exercice 5</u> : Du fil à retordre ! — 2 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). On considère les points $A(-5;2)$, $B(2;y)$ et $C(x;2)$.

1. On a
$$\begin{aligned}AB^2 &= (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2\\ 7^2 &= (-5-2)^2+(2-y)^2\\ 49 &= (-7)^2+(2-y)^2\\ 49 &= 49+(2-y)^2 \overset{-49}{\iff} 0=(2-y)^2 \iff 0=2-y \overset{+y}{\iff} y=2 \qquad \text{Donc} B(2;2)\end{aligned}$$

2. On a
$$\begin{aligned}AC^2 &= (x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2\\ 5^2 &= (-5-x)^2+(2-2)^2\\ 25 &= (-5-x)^2+0^2\\ 25 &= (-5-x)^2 \iff 5=-5-x \text{ ou} -5=-5-x \iff 10=-x \text{ ou } 0=-x \iff -10=x \text{ ou } 0=x\end{aligned}$$

Donc $C(0;2)$ ou $C(-10;2)$