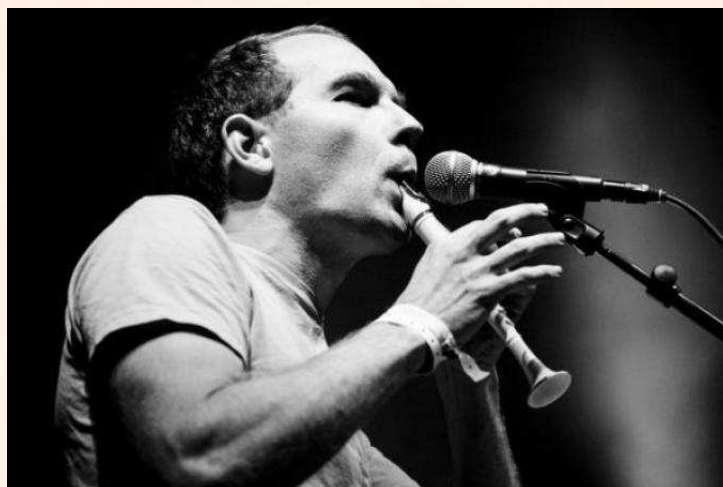
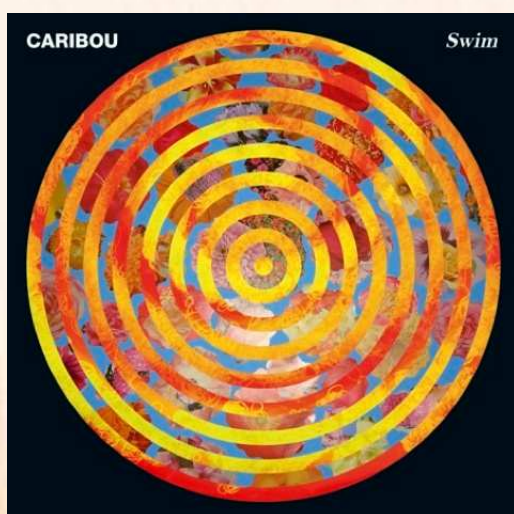


CHAPITRE 7

LA TÊTE DANS LES ÉTOILES



HORS SUJET



Document réalisé à l'aide de \LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée Jules Fil (Carcassonne)

TITRE : « Swim »

AUTEUR : CARIBOU

PRÉSENTATION SUCCINCTE : Depuis ses débuts sous le nom de Manitoba, le canadien Dan Snaith n'en finit plus de sonder en profondeur l'électro-pop. Passé l'expérience Manitoba, Dan s'est accaparé les commandes du groupe Caribou, groupe qui n'a jamais cherché à écrire la pop-song parfaite, celle que l'on se prend à fredonner dans la rue. La démarche pop et la dimension psychédélique du groupe se concentre sur la structure chirurgicale des morceaux. Il y a cette impression tenace de tenir avec l'album *Swim* l'alchimie parfaite entre les expérimentations audacieuses d'Animal Collective et les comptines électronica de Four Tet. Caribou atteint ici un niveau insoupçonné d'homogénéité et semble parvenir à une sorte de plénitude. *Swim* se révèle plus sombre que ses prédécesseurs, mais jamais plombant, notamment sur l'électro 80's d'un Leave House chancelant et sur le fantastique Found Out dont les trois minutes d'électro-pop risquent fortement de parasiter durablement vos pensées par la force d'un thème d'une simplicité désarmante.

Caribou signe là un brillant album de pop électronique ingénieuse et démontre une fois de plus tout le génie de Dan Snaith. Il n'en reste pas moins que Caribou est un groupe prenant toute sa mesure en live où ses prestations psychédéliqués révèlent tout leur pouvoir hypnotique et il y a fort à parier qu'avec ce nouvel album, les prochains concerts vont être sublimes.

Table des matières

I) Etude d'un tétraèdre	1
I.1. Construction, patrons, perspective	1
I.2. Etude d'une face : Géométrie du triangle	3
I.3. Etude du solide : surface, volume et duplication	4
II) Section du cube par un plan	5
II.1. Diverses formes	5
II.2. Avec un carton, de la ficelle et des punaises	6
II.3. Mise sur papier	8
III) Positions relatives	12
IV) Parallélisme dans l'espace	19
IV.1. Parallélisme entre droites	19
IV.2. Parallélisme entre plans	21
IV.3. Parallélisme entre droites et plans	22
V) D'autres solides	23
VI) Rappels de la géométrie plane	26
VI.1. Quadrilatères	26
VI.2. Triangles	28
VI.2.a. Droites remarquables du triangle	28
VI.2.b. Le triangle rectangle	29
VI.2.c. Triangles « proportionnels »	30
VI.3. Symétries	31
VII) Quelques exercices d'applications	32
VII.1. Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan	32
VII.2. Démontrer que des plans sont parallèles.	33
VII.3. Déterminer l'intersection de deux plans	33
VII.4. Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan	34

L'ESSENTIEL :

- ↪ Construire et manipuler des solides
- ↪ Connaître les formules de volumes et de surface de divers solides
- ↪ Représenter des situations en perspective cavalière
- ↪ Visualiser des positions relatives d'objet dans l'espace
- ↪ Dessiner la section d'un cube par un plan
- ↪ Résoudre des problèmes dans l'espace en se ramenant à des situations dans le plan
- ↪ Revoir la géométrie plane

« Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 7:

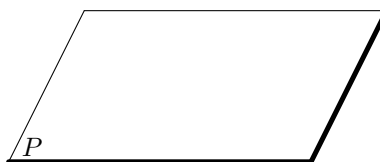
LA TÊTE DANS LES ÉTOILES



Résumé

Nous allons tenter à travers ce chapitre de nous familiariser avec ce que l'on appelle la dimension 3 : l'espace. La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme suffisamment évidentes pour ne pas les définir ici.

Rappelons tout de même qu'un plan est représenté en général par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans toutes les directions (comme la droite est représentée par un segment).



Une des plus grandes difficultés sera donc de parvenir à voir des figures spatiales, alors qu'elles sont tracées sur une feuille (donc dans un plan), c'est-à-dire en dimension 2.

Nous rappellerons quelques règles de perspective cavalière, ainsi que les pièges qu'il faudra éviter.

L'élève curieux peut se demander si on peut aller plus loin dans les dimensions... En effet, durant la scolarité, on ne cesse d'augmenter le nombre de dimension, 1 avec les droites, 2 avec la géométrie plane et 3 avec l'espace. Et bien oui ! On peut définir des espaces de dimension 4, le plus connu étant l'espace-temps. Il devient difficile par contre de représenter de telles géométries...

On peut aussi se demander si la perspective cavalière est la seule manière de représenter l'espace. La réponse est non, en peinture il n'est pas rare de voir une autre manière de représenter l'espace : la perspective parallèle.

I) Etude d'un tétraèdre

Ceci se fait en trois phases sur deux heures en classe entière :

- ↪ Constructions
- ↪ Propriété du tétraèdre et calcul de la surface
- ↪ Calcul du volume et duplication du tétraèdre.

I.1. Construction, patrons, perspective

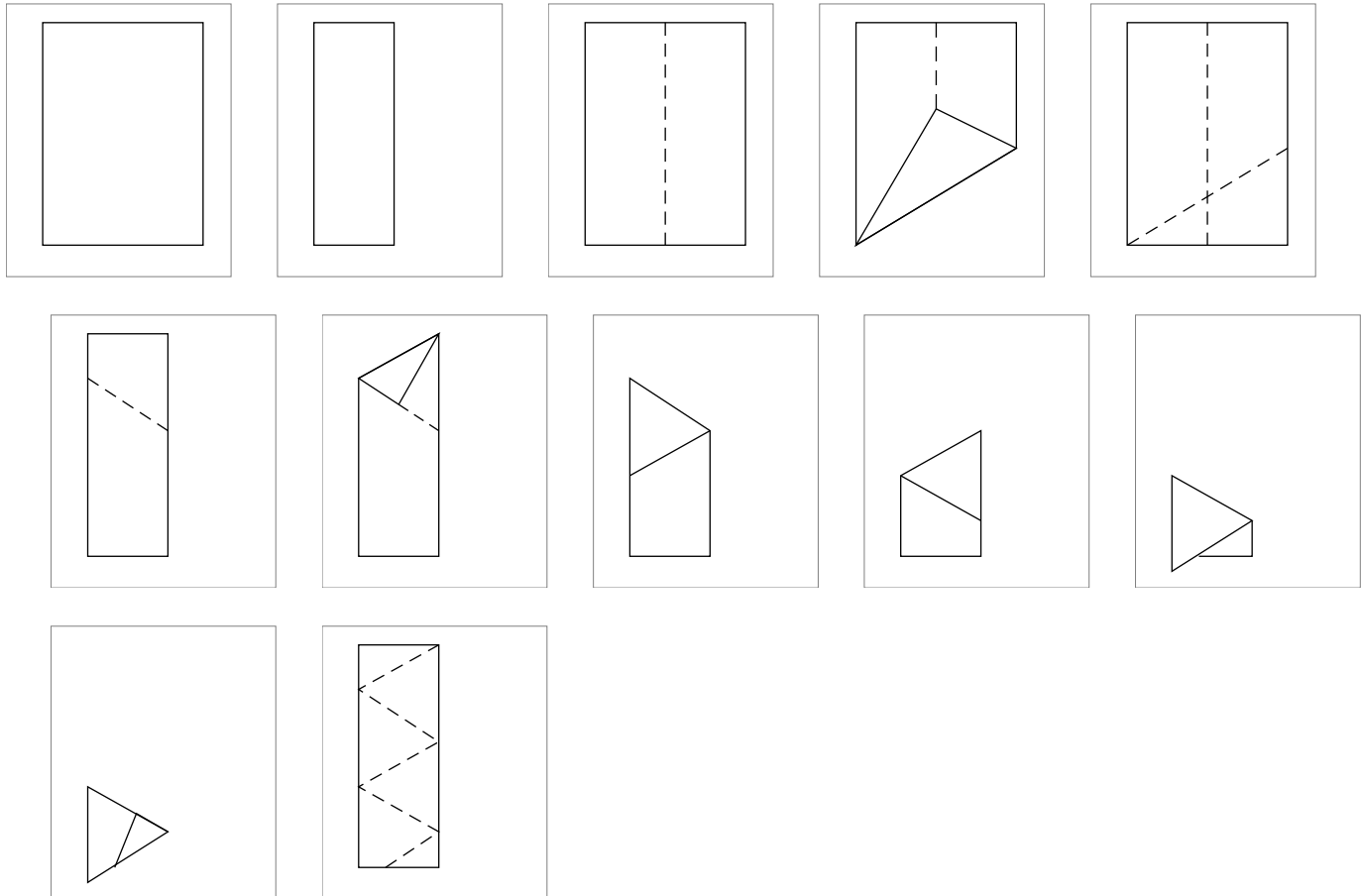


Travail de l'élève 1 : Cette activité est menée à l'oral, avec vidéo-projecteur.

Visionner le film de la construction d'un solide en origami, sur le site de Bricomath.

Faire construire à chaque élève ce solide à partir d'une feuille de papier A4.

Vidéo-projecter les schémas suivants au tableau pour les aider et circuler dans les rangs.



Mémo des questions après la construction :

1. Combien de faces possède le solide construit ? Quel est alors sa nature ?
2. Conjecturer la nature des faces de ce solide (nous le démontrerons plus tard).
*On parle de solide **régulier** car ses faces sont des polygones **réguliers** (tous les côtés ont la même longueur).*
3. Construire alors deux patrons différents de tétraèdre régulier de côtés 3 cm.
Vous pouvez déplier votre tétraèdre pour vous aider.
4. Représenter un tétraèdre en perspective cavalière.



Trace écrite : fiche sur le tétraèdre

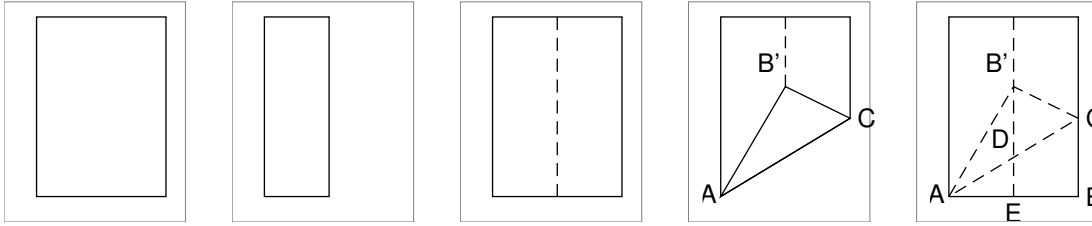
- ↪ Représentation en perspective cavalière
- ↪ Nombre de faces, nature
- ↪ Nombre de sommets
- ↪ Différents patrons

I.2. Etude d'une face : Géométrie du triangle

Travail de l'élève 2 :

1. Construction

- a. Prendre une nouvelle feuille de papier A4 et recommencer les premières étapes de la construction ci-dessous.



- b. Déplier votre feuille, nommer les points comme ci-dessus et repasser les pliures en couleurs.

2. Démonstration

- Expliquer pourquoi $AD = BD$ et coder la figure.
- Quelle est la nature du triangle ABC ?
En déduire que D est le milieu de $[AC]$ et coder la figure.
- Que peut-on alors dire du triangle BCD ?
Quels angles sont alors égaux ? Coder la figure.
- Grâce à la construction, que pouvez-vous dire sur B et B' ?
Et des triangles BCD et $B'CD$?
- Coder alors toutes les égalités de longueurs et d'angles que vous pouvez en déduire dans les triangles
- Pouvez-vous dire sur les droites (BC) et $(B'D)$?
- Que pouvez-vous en déduire sur les mesures de \widehat{BCD} et $\widehat{B'DC}$?
- Que peut-on alors dire du triangle BCD ?

3. Calculer alors la surface de votre tétraèdre.

Pour la dernière question, les élèves sont en activité de recherche, le professeur les aide au fur et à mesure.

Mémo des questions :

- Qu'est-ce que la surface ? Son unité ?
- Dimension de notre feuille : $21\text{cm} \times 29.7\text{cm}$
- Par construction, que vaut la hauteur h d'une des faces ?
- La hauteur d'un triangle équilatéral est aussi la médiane.
- Appliquer Pythagore On trouve $c = \sqrt{147} = 7\sqrt{3} \approx 12,124$ et la surface vaut donc $\frac{7\sqrt{3} \times 10,5}{2} \times 4 = 7\sqrt{3} \times 21 = 147\sqrt{3} \approx 254.6\text{ cm}^2$.


Définition 1.

Quand des éléments de l'espace appartiennent à un même plan, on dit que ces éléments sont **coplanaires**.

Remarque : Lorsque tous les éléments d'un problème sont coplanaires, toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore ...)

Dans un problème de géométrie dans l'espace, on essaiera donc toujours de se placer dans un plan (que l'on prendra la peine de préciser) pour raisonner.

I.3. Etude du solide : surface, volume et duplication

 **Travail de l'élève 3** : Pour cette activité, un grand squelette de tétraèdre est posé sur le bureau, afin de bien voir le solide et surtout son intérieur. Penser à préciser sa longueur d'arête.

La réflexion est menée à l'oral, en suivant le fil d'idées et de questions des élèves.

On rappelle la formule du volume du tétraèdre :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

? Question :

Calculer le volume du tétraèdre que l'on a construit.

Mémo de questions :

1. Dimension de notre feuille : 21cm × 29.7 cm
2. C'est quoi une base ? Rappeler la valeur trouvée précédemment $147\sqrt{3} \approx 254.6 \text{ cm}^2$
3. C'est quoi la hauteur ?
Installer un fil plombé sur le grand tétraèdre pr visualiser la hauteur et en donner une mesure approximative (rappeler celle de l'arête).
4. Comment et où tombe le fil de plomb pour le triangle de la base ?
5. Trouver un triangle rectangle permettant de calculer la hauteur.
6. Rappel du centre de gravité situé aux deux-tiers de la médiane en partant du sommet.
A 7cm ici donc
7. Grâce à Pythagore, on trouve $h = 7\sqrt{2} \approx 9.90 \text{ cm}$
8. Donc $V = \frac{1}{3} \times 147\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} = 7^3 \sqrt{6} \approx 840.17 \text{ cm}^3$.

? Question :

Duplication du tétraèdre

1. En assemblant plusieurs des tétraèdres construits précédemment, construire un nouveau tétraèdre aux dimensions doublées.
2. Quelles sont les dimensions de ce nouveau tétraèdre (longueur d'arête, surface, volume) ?
3. Quelle est le volume du trou ?
4. Quelle est la forme du « trou » au cœur du nouveau tétraèdre ?

Mémo Les élèves se rendent vite compte qu'il ne faut pas emboîter les tétraèdres. On peut leur proposer des squelettes pour plus de stabilité. Il est alors simple en enlevant les pointes du grand tétraèdre d'observer la forme d'un octaèdre régulier.

Trace écrite

- ↪ Rajouter à la fiche la formule du volume.
- ↪ Fiche rappels sur les triangles (droites remarquables, triangles rectangles et semblables)
- ↪ Fiche rappels sur la symétrie

Proposition 1.

Lorsque l'on multiplie par un nombre $k > 0$ les dimensions (longueur d'arête) d'un solide :

- ↪ sa surface est multipliée par k^2
- ↪ son volume est multiplié par k^3 .

II) Section du cube par un plan

Cette partie se fait en trois phases, complètement plagiées sur le site : [Bricomath](#).

Elle se déroule en trois phases en module (2h) : observations, section grandeur nature puis section sur papier.

II.1. Diverses formes



Travail de l'élève 4 : Les élèves sont par groupe de deux. Chaque groupe a devant lui :

- ↪ une bassine avec de l'eau
- ↪ un cube en plastique transparent, dans lequel l'eau peut rentrer et surquel cinq points sont marqués et nommés.

Les élèves doivent mettre les cubes dans l'eau de manière à ce que la surface de l'eau passe par trois des points. Ils obtiendront successivement un triangle, un trapèze puis un pentagone.

Ils doivent alors représenter sur une feuille l'allure de la section obtenue.

Mémo questions

1. Que signifie le mot section ?
2. Combien de points sont nécessaires pour définir une droite ? un plan ?
3. Positions relatives de deux plans dans l'espace ?
4. Combien y a-t-il de possibilités quant à la nature de la section du cube par un plan ?
5. Est-il possible d'avoir une section à 7 côtés ? Pourquoi ?
6. Quatre points donnés sont-ils coplanaires ?

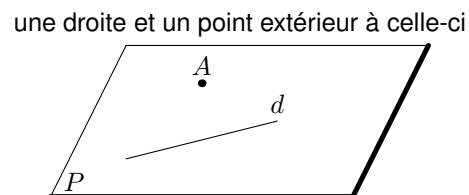
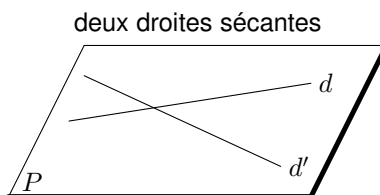
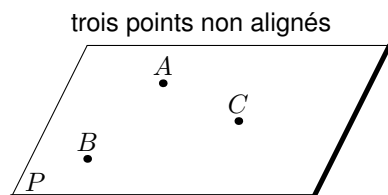


Conclusion

- ↪ **Axiomes d'incidences** : en géométrie dans l'espace, il s'agit des règles qui fournissent les relations entre les points, les droites et les plans.
 - Deux points **non confondus** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer une droite.
 - Trois points **non alignés** sont nécessaires et suffisent pour définir et nommer un plan.
 - Si M et N sont deux points d'un plan \mathcal{P} , alors tous les points de la droite (MN) appartiennent à \mathcal{P} .
- ↪ L'intersection du plan et d'une face est un segment de droite .
- ↪ Si le plan coupe deux faces opposées, il le fait suivant deux droites parallèles entre elles .
- ↪ Les polygones obtenus pour la section d'un cube par un plan peuvent avoir 3, 4, 5 ou 6 faces .

Remarques :

- ↪ On nomme un plan par trois points non alignés entre parenthèses (ceci permet de le différencier du triangle).
- ↪ Deux ou trois points de l'espace sont donc toujours coplanaires (il existe toujours un plan passant par ces deux ou trois points).
- ↪ Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions suivantes :



↪ En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les *Éléments* d'Euclide. Aujourd'hui, on l'utilise en logique mathématique pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie, appelé axiomatique, doit être non-contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Un axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie et représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique.

L'axiomatique peut être choisie arbitrairement mais la pertinence d'une théorie en dépendra. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation d'une théorie et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique.

II.2. Avec un carton, de la ficelle et des punaises



Travail de l'élève 5 : Les élèves sont par groupe de deux ou trois. Chaque groupe a devant lui :

1. le cube marqué avec six points (attaches parisiennes, pour obtenir successivement un triangle, un trapèze, un pentagone et un hexagone),
2. du fil de cuisine,
3. des punaises
4. un traceur de parallèles dans l'espace construit à l'aide d'un carton plié en trois parties avec des plis parallèles au bord.
5. un prolongeur d'arêtes : un coin en bois sur lequel j'ai fixé une punaise .

? Question :

Construire la section du cube par des plans donnés en plantant des punaises sur les arêtes aux endroits bien choisis et en tirant une ficelle pour figurer la surface de l'eau qui passerait par ces trois points.

Mémo questions

- ↪ Pourquoi les bords du traceur de parallèles sont parallèles ?
- ↪ La section n'est pas une simple ligne brisée avec la ficelle reliant les trois points (remontrer le cube)

L'enseignant peut lui aussi le faire en même temps et couper son carton au couteur pour bien montrer la forme de la section finale.



Conclusion

Pour trouver l'intersection d'un solide avec un plan \mathcal{P} , **il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.**

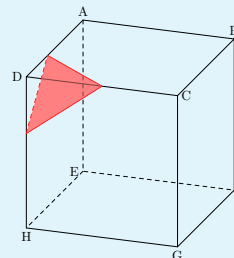
A chaque étape, on doit se poser les questions suivantes dans cet ordre :

- ↪ **Connait-on deux points de \mathcal{P} sur une même face du solide ?**
*Dans ce cas, on les relie et on prolonge le segment jusqu'aux arêtes de la face concernée.
 On obtient deux nouveaux points et on revient à la première question.*
- ↪ **Si l'on connait l'intersection de \mathcal{P} avec une face du solide, connait-on un point de \mathcal{P} sur l'éventuelle face du solide parallèle à la première ?**
*Dans ce cas, on utilise la troisième propriété, et on trace la parallèle à l'intersection connue passant par le point connu. On s'arrête aux arêtes de la face concernée.
 On obtient deux nouveaux points et on revient à la première question.*
- ↪ **Si l'on n'est pas dans l'un des cas précédents**, on doit construire un point à l'extérieur du solide, qui est commun à \mathcal{P} et à l'un des plans portés par l'une des faces du solide. Et cela devient très complexe à expliquer, donc mieux vaut avoir écouté en cours ...

Sections planes d'un cube

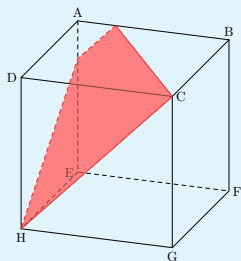
La section d'un cube par un plan \mathcal{P} peut être de la nature suivante :

↪ Un **triangle** (éventuellement réduit à un point) : on ne se pose que la première question

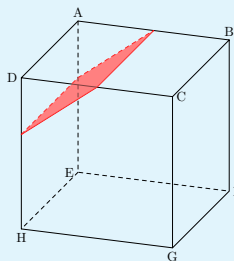


↪ Un **quadrilatère** : on ne se pose que les deux premières questions

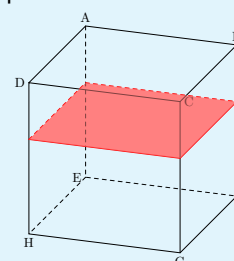
Un **trapèze**
dans tous les cas



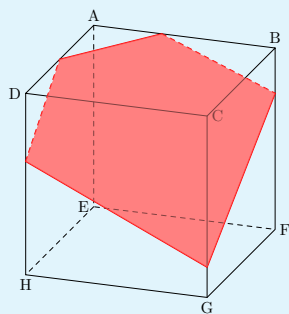
Parfois même un **Rectangle**
lorsque \mathcal{P} est parallèle à l'une des arêtes



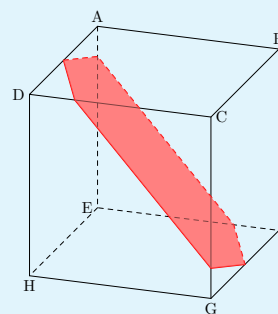
Parfois même un **Carré** lorsque \mathcal{P} est parallèle à l'une des faces



↪ Un **pentagone** : on se pose les 3 questions




↪ Un **hexagone** : on se pose les 3 questions



II.3. Mise sur papier

La troisième phase se fait sur papier où les élèves transposent ces méthodes (tracé des parallèles sur les faces parallèles, prolongement des arêtes) sur feuilles avec des cubes en perspective cavalière.

Au préalable, on peut le faire remarquer qu'un plan est entièrement déterminé par la donnée de trois points non alignés.

 **Travail de l'élève 6** : On considère un parallélépipède \mathcal{P} rectangle ABCDEFGH représenté ci-contre et I le milieu de [FG].

Des élèves doivent couper le solide \mathcal{P} selon un plan de leur choix. Commenter chacune des affirmations suivantes :

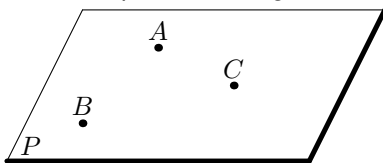
- ↪ Norbert dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F. »
- ↪ Simone dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F et G »
- ↪ Loïc dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F, G et I »
- ↪ Fabrice dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F, G et A »
- ↪ Cécile dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F, G, A et D »
- ↪ Myriam dit : « Je coupe \mathcal{P} selon le plan qui passe par F, G, A et E »

Conclusion

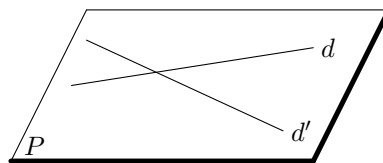
- ↪ Par deux points A et B **distincts** de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut-être notée (AB).
- ↪ Par trois points A, B et C **non alignés** de l'espace passe un et un seul plan. Ce plan peut-être noté (ABC). Ainsi, deux ou trois points de l'espace sont donc toujours **coplanaires** (il existe toujours au moins un plan contenant ces deux ou trois points).
- ↪ Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Remarque : Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

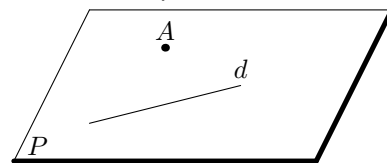
trois points non alignés



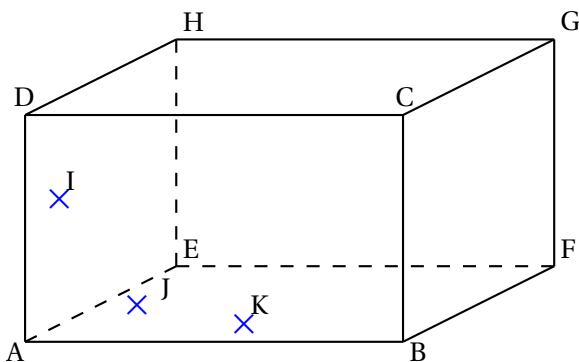
deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



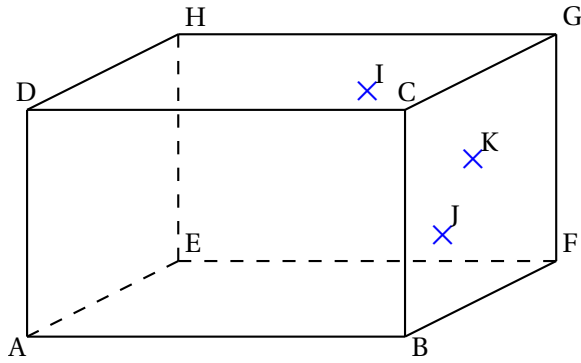
Exercice 1 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (ABE) et $I \in (ADE)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

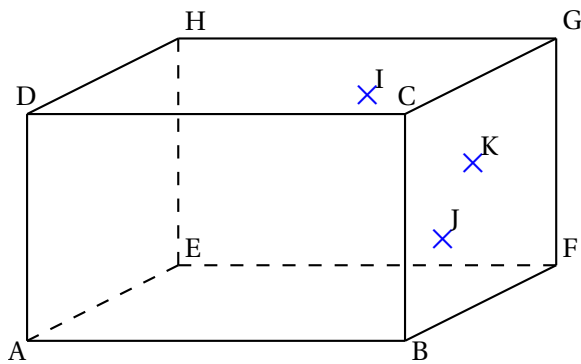
Exercice 2 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (BFG) et $I \in (CDH)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

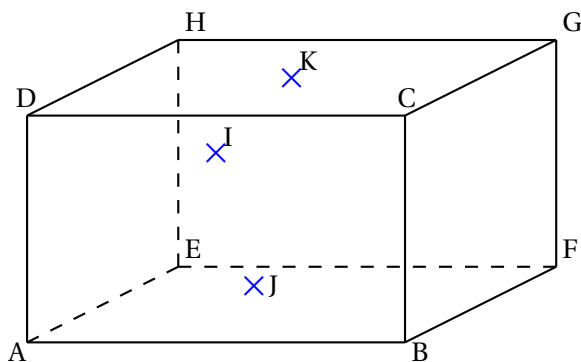
Exercice 3 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que J et K sont dans (EFG) et $I \in (CDH)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

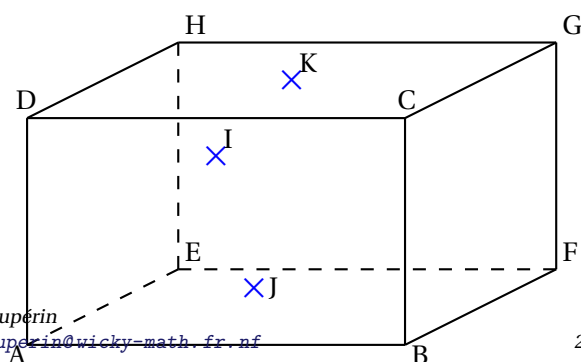
Exercice 4 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et $K \in (DCG)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

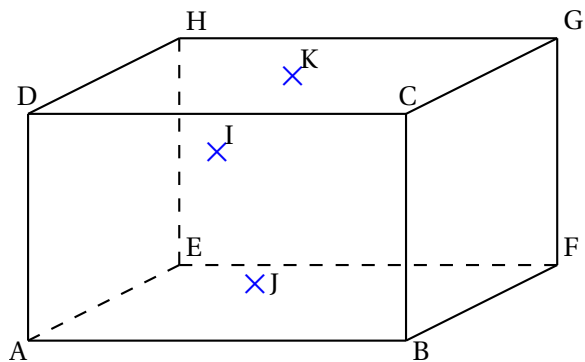
Exercice 5 :



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et J sont dans (ABC) et $K \in (EFG)$, comme sur la figure ci-contre.


Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

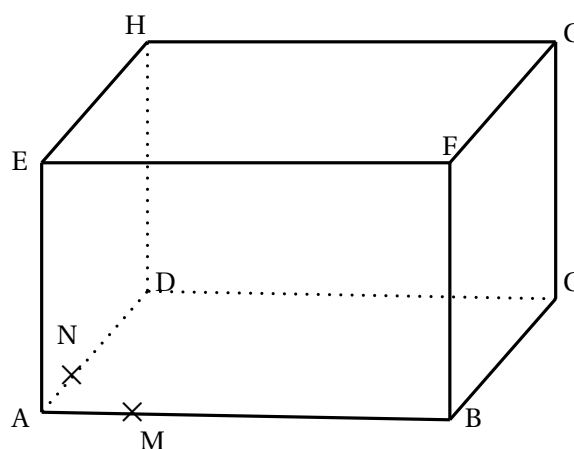
 **Exercice 6 :**



On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et les points I, J, K tels que I et K sont dans (EFG) et $K \in (ABF)$, comme sur la figure ci-contre.

Dessiner la section du parallélépipède par le plan (IJK).

 **Exercice 7 :** Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit N et M deux points quelconques respectivement situés sur les arêtes [AD] et [AB]. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG) sur papier ou à l'aide du logiciel géogébra.





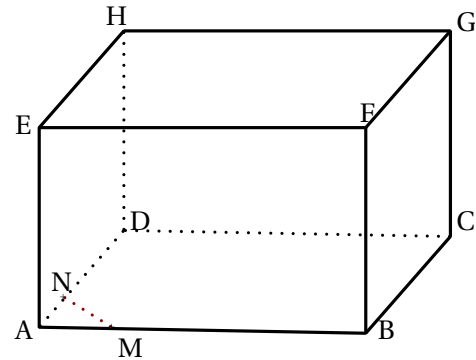
Solution : Exo 7

Voici les différentes étapes :

1. Trace du plan (MNG) sur la face ABCD

M et N sont deux points communs aux plans (ABC) et (MGN).

L'intersection de ces deux plans est donc la droite (MN), et la trace du plan (MGN) sur la face ABCD est donc le segment [MN]. (en pointillés rouge sur la figure).

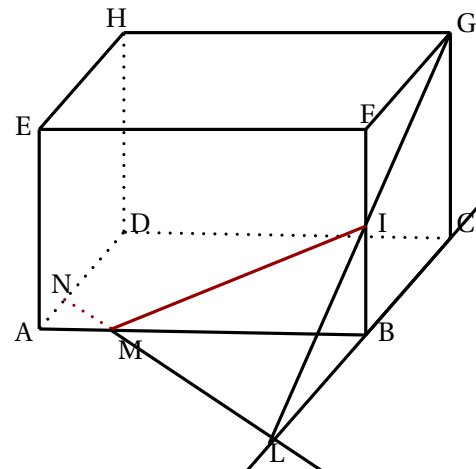


2. Trace du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE.

Le point G est commun aux plans (MNG) et (BCG). Il suffit de trouver un second point commun aux deux plans.

$(MN) \subset (MGN)$ et $(BG) \subset (BCG)$ donc le point d'intersection de (MN) et (BC) appartient à la fois aux plans (MNG) et (BCG). Appelons L ce point. On en déduit que l'intersection des plans (MNG) et (BCG) est la droite (GL).

Soit I le point d'intersection de (GL) et (BF) : les segments [GI] et [MI] sont les traces du plan (MNG) sur les faces BCGF et ABFE respectivement (en traits pleins rouge sur la figure).

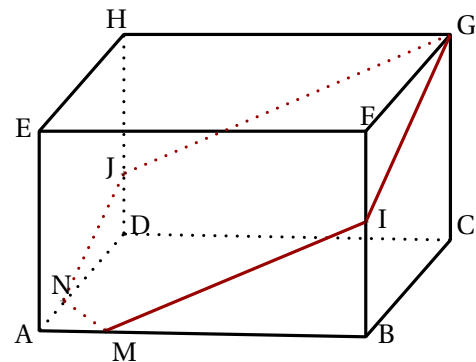


3. Traces du plan (MNG) sur les faces CGHD et ADHE

Les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles. Le plan (MGN) coupe le plan (BCG) selon la droite (GI). On en déduit que (MGN) coupe (ADH) selon une droite parallèle à (GI).

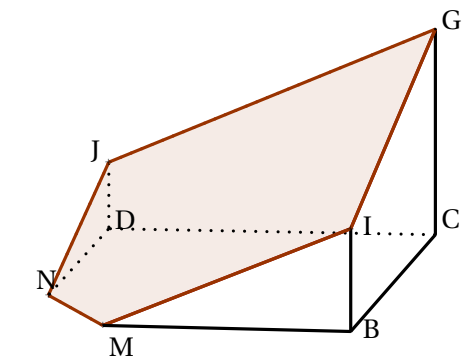
$N \in [AD] \subset (ADH)$ donc $N \in (ADH)$. De plus, par définition $N \in (MGN)$. N appartient donc à l'intersection des plans (MGN) et (ADH). On en déduit que l'intersection de ces deux plans est la droite parallèle à (GI) passant par N.

Cette droite coupe l'arête [DH] en un point J : les segments [NJ] et [JG] sont donc les traces du plan (MNG) sur les faces ADHE et CGHD respectivement (en traits pointillés rouge sur la figure).



4. Section du pavé ABCDEFGH par le plan (MNG).

La section du pavé par le plan (MNG) est donc le pentagone MIGJN.



III) Positions relatives

Travail de l'élève 7 : Repérer autour de nous

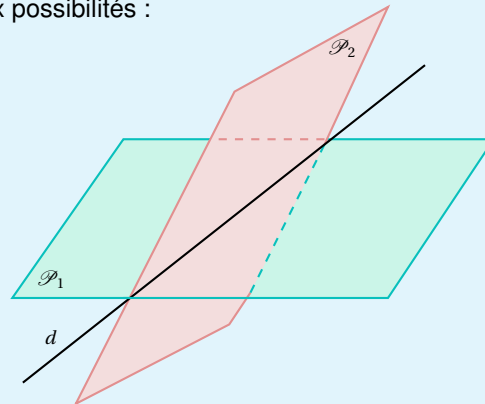
1. Combien de pieds faut-il au minimum pour qu'une chaise soit stable ?
2. Repérer dans la salle de classe :
 - a. Deux plans qui sont parallèles.
 - b. Deux plans qui se coupent. Quelle semble être leur intersection ?
 - c. Une droite et un plan parallèles ?
 - d. Une droite et un plan sécant ? Quelle semble être leur intersection ?
 - e. Deux droites parallèles. Pouvez-vous trouver un plan qui les contient toutes les deux ? Est-ce toujours le cas pour des droites parallèles ?
 - f. Deux droites sécantes. Pouvez-vous trouver un plan qui les contient toutes les deux ? Est-ce toujours le cas pour des droites sécantes ?
 - g. Des droites qui ne sont ni parallèles ni sécantes. Pouvez-vous trouver un plan qui les contient toutes les deux ? Est-ce toujours le cas pour de telles droites ?

De deux plans

Soient \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux plans de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

1. Les plans sont sécants.

Leur intersection est une droite.

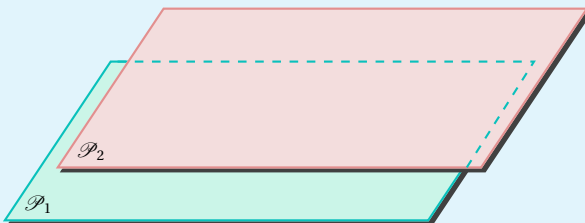


2. Les plans sont parallèles (même direction).

Il y a alors deux sous-cas :

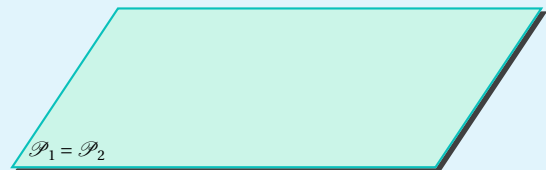
a. Strictement parallèles

Ils n'ont aucun point commun.



b. Confondus

Ils ont une infinité de points communs.

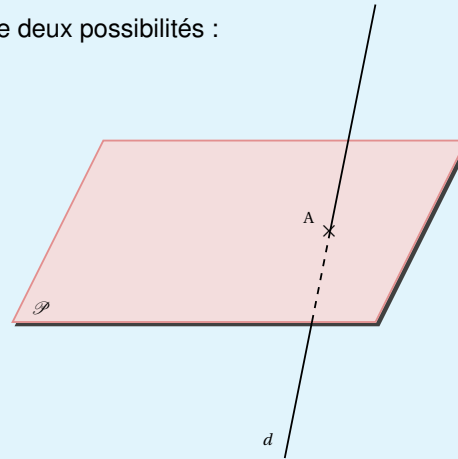


Remarque : Ainsi lorsque l'on connaît deux points A et B communs à deux plans non confondus, on sait qu'ils sont sécants selon la droite (AB).

i Une droite et un plan

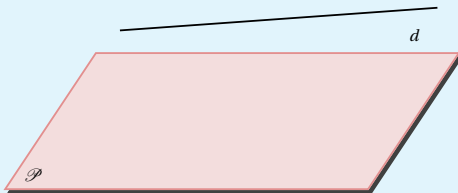
Soient d est une droite et P un plan de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

- 1. **La droite et le plan sont sécants.**
Ils ont un unique point commun.

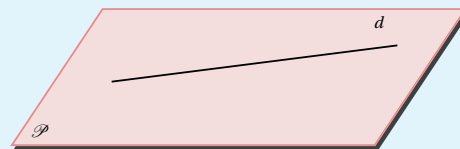


- 2. **La droite et le plan sont parallèles** (même direction).
Il y a alors deux sous-cas :

- a. **La droite est strictement parallèle au plan.**
Ils n'ont aucun point commun.



- b. **La droite est incluse dans le plan.**
Ils ont une infinité de points communs.

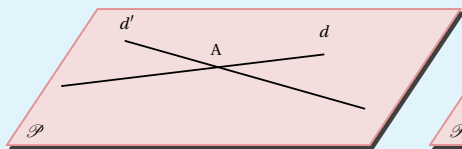


i Deux droites

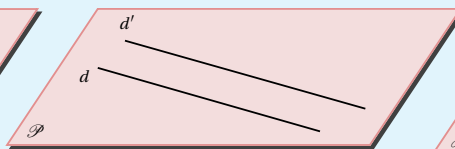
Soient d et d' deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

- 1. **Les droites sont coplanaires** (il existe un plan contenant ces deux droites)
On retrouve alors les positions relatives des droites dans un plan : il y a trois sous-cas.

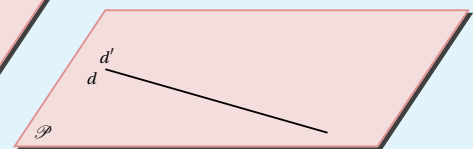
- a. **Sécantes.**
Elles ont un unique point commun.



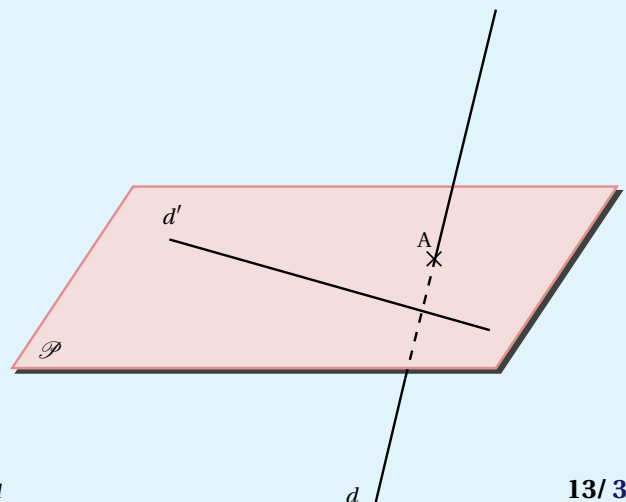
- b. **Parallèles strictement**
Elles n'ont pas de point commun.



- c. **Parallèles confondues.**
Elles ont une infinité de points communs.

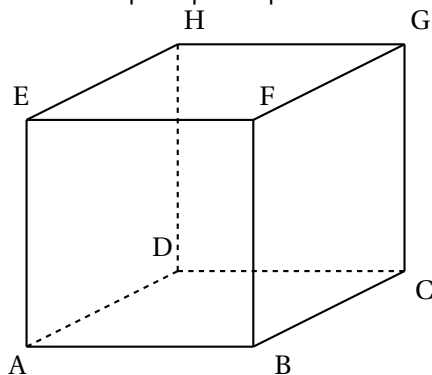


- 2. **Les droites sont non coplanaires** (il n'existe aucun plan contenant ces deux droites)
Elles n'ont aucun point commun.



 **Exemple :**

Illustrer chaque réponse précédente sur le cube ABCDEFGH.



 **Exercice du Cours :** On considère le cube de l'exemple précédent.

1. Citer des droites passant par E et parallèles au plan (BCG).

2. Etudier la position relative des droites :

↔ (BC) et (BH)

↔ (EG) et (BC)

↔ (EG) et (AC)

3. Quelle est l'intersection éventuelle des plans :

↔ (ABF) et (BCG)

↔ (AEG) et (ADH)

↔ (EFG) et (ACD)

↔ (CDH) et (EFG)

↔ (BDH) et (CGH)

↔ (AEC) et (AEG)

4. Placer I le milieu de [AB] et K le milieu de [CD].

Quelle est, dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans ?

↔ (AIE) et (BIG)

↔ (ADI) et (BKC)

↔ (HEF) et (BKC)

Remarque : Dans l'espace,

↔ Deux droites sans points commun ne sont pas forcément parallèles ! Elles peuvent être non coplanaires.

↔ Deux droites qui ne sont pas parallèles n'ont pas toujours de point commun ! Elles peuvent être non coplanaires.

↔ Un plan est entièrement déterminé par deux droites sécantes.

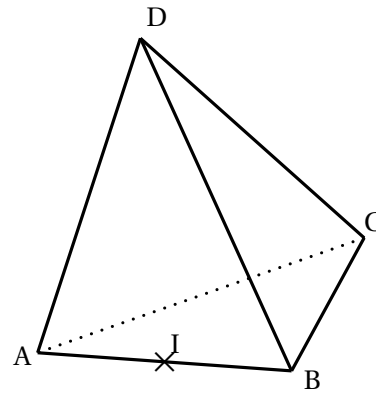
↔ Un plan est entièrement déterminé par deux droites strictement parallèles.

Exercice 8 : ABCD est un tétraèdre et I est le milieu de [AB].

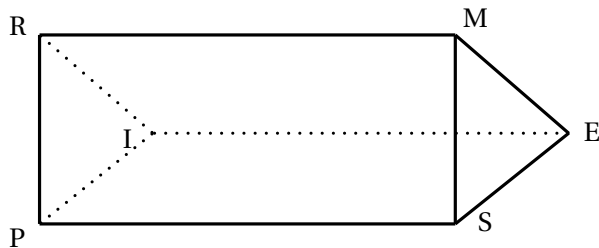
Compléter les phrases mathématiques suivantes à l'aide des symboles

$\subset, \in, \notin, \not\subset$

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. I... (AB) | 5. (AB)... (CBA) |
| 2. B... (CDI) | 6. (DI)... (BCI) |
| 3. (CI)... (ABC) | 7. B... (ADI) |
| 4. D... (BI) | 8. B... (IA) |



Exercice 9 :

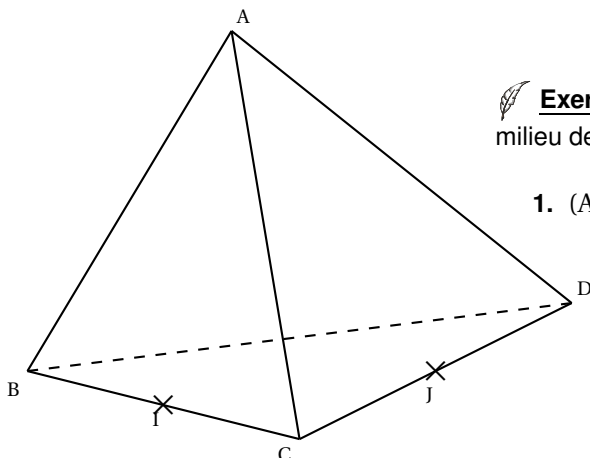
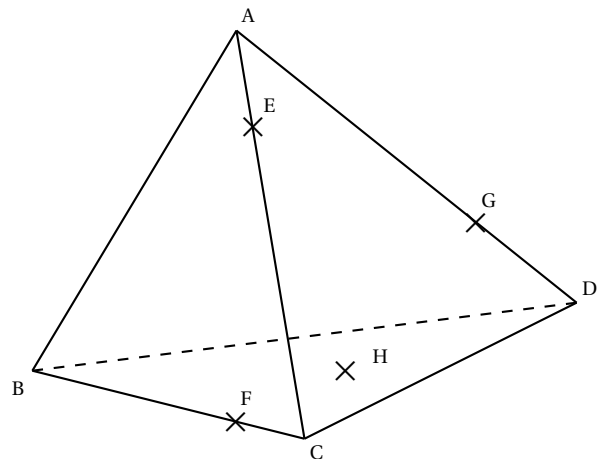


PRISME est un prisme droit à base triangulaire. Déterminer les positions relatives :

- des droites (RE) et (MI).
- des droites (PI) et (EM).
- de la droite (EM) et du plan (IPS).
- de la droite (SR) et du plan (PMR).
- du plan (IRP) et du plan (IEM).

Exercice 10 : ABCD est un tétraèdre. E, F et G sont des points sur des arêtes comme ci-contre et H est un point de la face (BCD).

- Rappeler les positions relatives possibles de deux droites dans l'espace.
- Etudier la position relative des droites :
 - \rightsquigarrow (AF) et (EG) \rightsquigarrow (EH) et (BC) \rightsquigarrow (FG) et (BC)
- Rappeler les positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace.
- Dans chaque cas, la droite et le plan sont-ils sécants ?
 - \rightsquigarrow (FH) et (ABD) \rightsquigarrow (BD) et (ACH) \rightsquigarrow (EG) et (ACD)



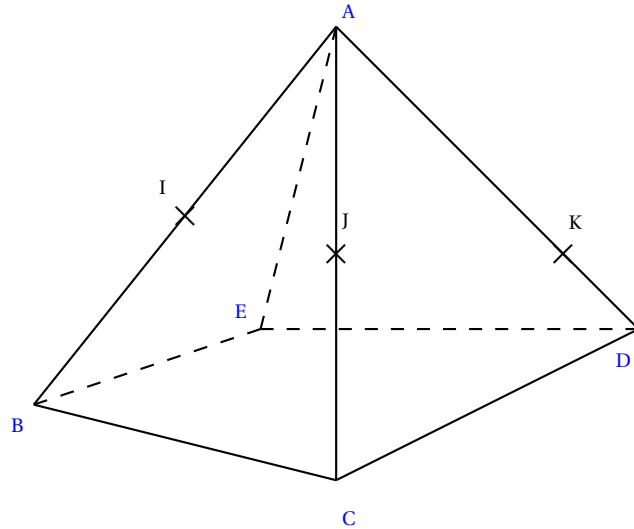
Exercice 11 : ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [BC] et J le milieu de [CD]. Quelle est l'intersection des plans :

- (AIJ) et (ABC) ?
- (AIJ) et (BCD) ?
- (ABJ) et (AID) ?

Exercice 12 : ABCDE est une pyramide, dont la base BCDE est un quadrilatère tel que (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. K est le point du segment [AD] tel que $AK = \frac{3}{4}AD$.

1. Déterminer la position relative :
 - a. des droites (IJ) et (BC)
 - b. des droites (IJ) et (JK)
 - c. des droites (JK) et (CD)
 - d. des droites (BC) et (AE)
2. Représenter l'intersection :
 - a. de la droite (JK) et du plan (BCD)
 - b. des plans (ABC) et (ADE).

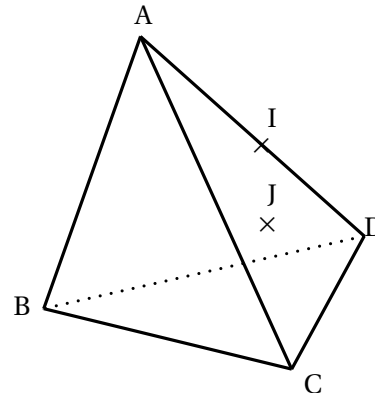


Application : section d'un solide par un plan

Pour tracer la section d'un solide par un plan, il faut déterminer et tracer les intersections de ce plan avec toutes les faces du solide.

Exercice 13 : Soit ABCD un tétraèdre. Le point I est le milieu de [AD]. Le point J est sur la face ACD tel que (IJ) ne soit pas parallèle à (AC).

Tracer la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJB).



Solution :

I et J sont deux points du plan (ACD), par conséquent :

$$(IJ) \subset (ACD)$$

. Comme $B \notin (ACD)$ les plans (IJB) et (ACD) ne sont pas confondus, comme I est commun aux deux plans, leur intersection est une droite : il s'agit de la droite

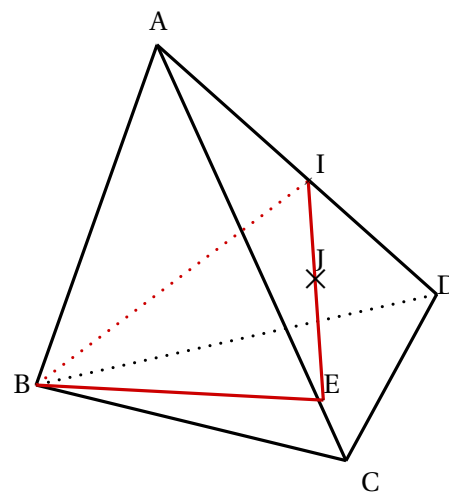
$$(IJ)$$

La trace du plan (IJB) sur la face ACD est donc le segment [IE] (où E est le point d'intersection des droites (IJ) et (AC), tracée ci-dessous en rouge.

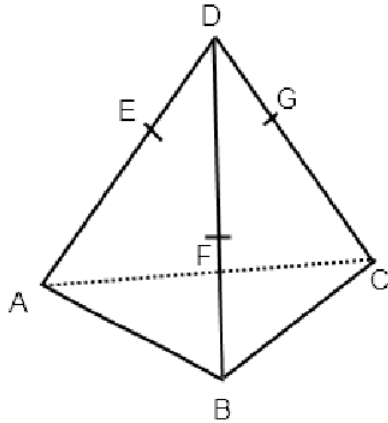
On démontre de la même manière que la trace du plan (IJB) sur la face ABD est le segment [BE], puis que la trace du plan (IJB) sur la face ABC est le segment [BI].

Ainsi la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJB) est le

triangle BIE, en rouge sur le schéma suivant :



Exercice 14 :

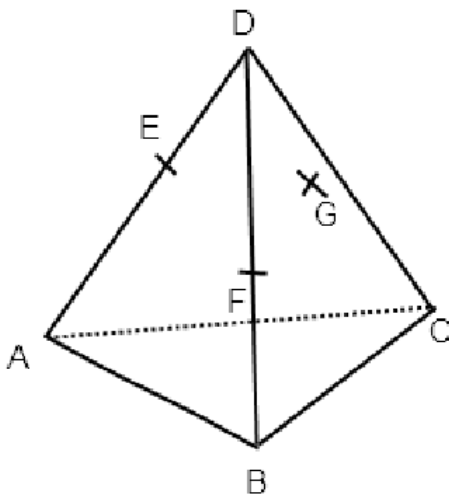


On considère le tétraèdre ABCD et E, F, G trois points tels que $E \in [AD]$, $F \in [BD]$ et $G \in [CD]$, comme sur la figure ci-dessus.

Nous allons chercher l'intersection du plan (EFG) avec chacun des plans déterminés par les faces du tétraèdre.

1.
 - a. Quelle est l'intersection de la face ABD et du plan (EFG) ? Et des plans (ABD) et (EFG) ?
 - b. Quelle est l'intersection de la face BCD et du plan (EFG) ? Et des plans (BCD) et (EFG) ?
 - c. Quelle est l'intersection de la face ACD et du plan (EFG) ? Et des plans (ACD) et (EFG) ?
 - d. Quelle est l'intersection de la face ABC et du plan (EFG) ?
 - e. Tracer alors la section du tétraèdre ABCD par le plan (EFG).
2.
 - a. Quelle sont les positions relatives des droites :
 - \rightsquigarrow (EF) et (AB) ?
 - \rightsquigarrow (GF) et (CB) ?
 - b. En notant I l'intersection entre (EF) et (AB) et J celle entre (GF) et (CB), expliquer pourquoi la droite d'intersection entre les plans (EFG) et (ABC) est la droite (IJ) ?

Exercice 15 :



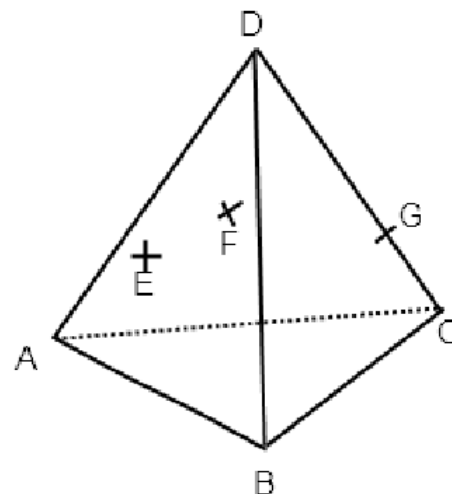
On considère le tétraèdre ABCD et E, F, G trois points tels que $E \in [AD]$, $F \in [BD]$ et $G \in [BC]$, comme sur la figure ci-contre.

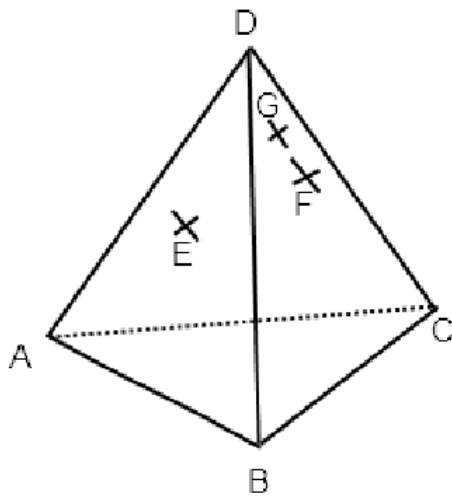
Nous allons chercher à dessiner l'intersection du plan (EFG) avec chacune des faces du tétraèdre ABCD.

1. Quelle est l'intersection de la face ABD et du plan (EFG) ?
2. Quelle est l'intersection de la face BCD et du plan (EFG) ? (Créer un point si besoin)
3. Quelle est l'intersection de la face ACD et du plan (EFG) ?
4. Tracer alors la section du tétraèdre par le plan (EFG).

Exercice 16 : On considère le tétraèdre ABCD et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ABD) et $G \in [CD]$, comme sur la figure ci-contre.

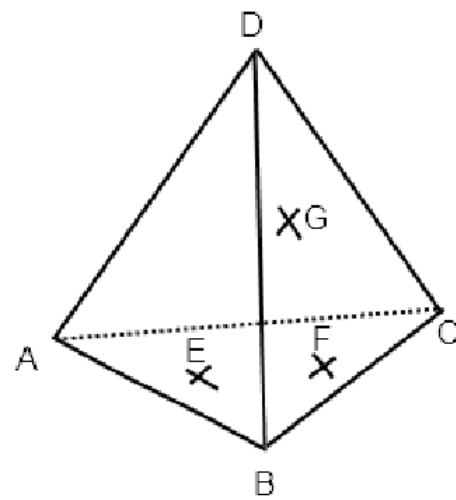
Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).





Exercice 17 : On considère le tétraèdre ABCD et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ACD) et $G \in (BCD)$, comme sur la figure ci-contre.
 Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).

Exercice 18 : On considère le tétraèdre ABCD et E, F, G trois points tels que E et F sont dans (ABC) et $G \in (BCD)$, comme sur la figure ci-contre.
 Dessiner la section du tétraèdre par le plan (EFG).



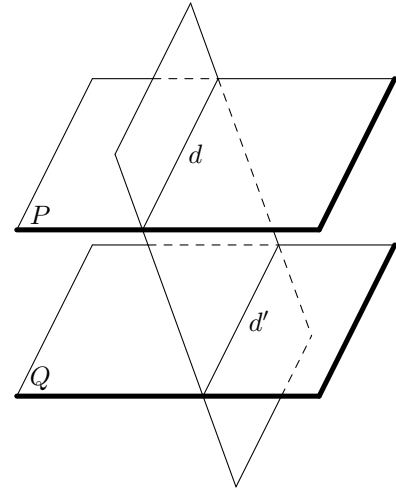
IV) Parallélisme dans l'espace

La liste des propriétés n'est pas exhaustive...certaines propriétés "évidentes" concernant le parallélisme dans l'espace n'apparaissent pas dans cette section.

IV.1. Parallélisme entre droites

Théorème 1.

- ↪ Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.
- ↪ Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.



Preuve 2

Soient D_1 et D_2 les droites d'intersection. Elles sont coplanaires, donc soit parallèles, soit sécantes. Or si elles sont sécantes en un point M alors M appartient à \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , ce qui est absurde. Donc elles sont strictement parallèles.



Exemple :

Soit ABCDEFGH un pavé droit. Soit I un point de $[EF]$. Déterminer et tracer l'intersection des plans (EFG) et (ACI).

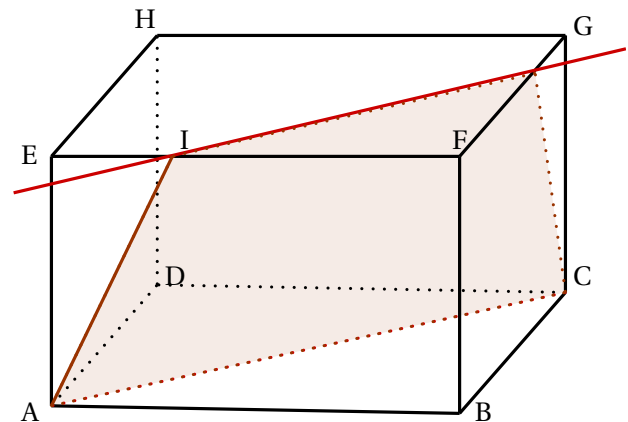


Solution :

Les plans (ABC) et (EFG), qui contiennent les faces ABCD et AFGH du pavé, sont parallèles.

$I \in (ACI)$, mais $I \notin (ABC)$, donc les plans (ACI) et (ABC) ne sont pas confondus. Comme A et C sont deux points communs aux plans (ACI) et (ABC), on peut conclure que les plans (ABC) et (ACI) sont sécants selon la droite (AC). On a donc $(ABC) \parallel (EFG)$ et $(ACI) \cap (ABC) = (AC)$. On en déduit que le plan (ACI) coupe également le plan (EFG), selon une droite parallèle à (AC).

L'intersection de ces deux plans est donc la droite parallèle à (AC) passant par I.

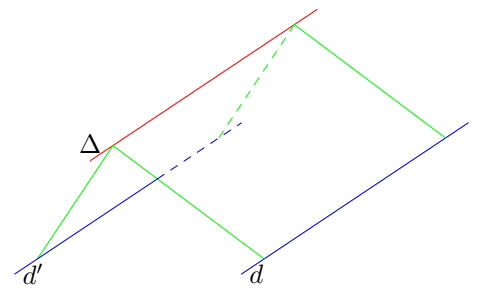


Remarque : L'intersection se note à l'aide du symbole \cap . Ainsi si la droite d est l'intersection des plans P et Q , on note :

$$d = P \cap Q$$

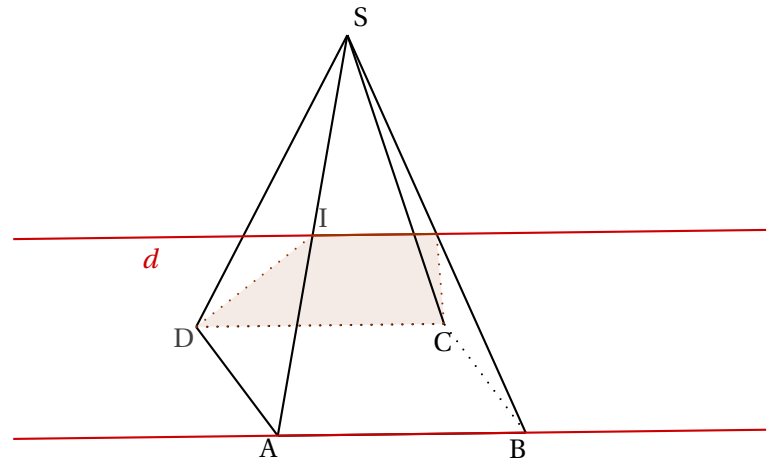
Théorème 2. (du toit)

d et d' sont deux droites parallèles. P est un plan contenant d et P' un plan contenant d' .
Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à d et d' .



Exemple :

Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S à base carrée. Soit I le milieu de l'arête $[SA]$. Le plan (CDI) coupe le plan (SAB) selon une droite d .
Démontrer que d est parallèle à (AB) .

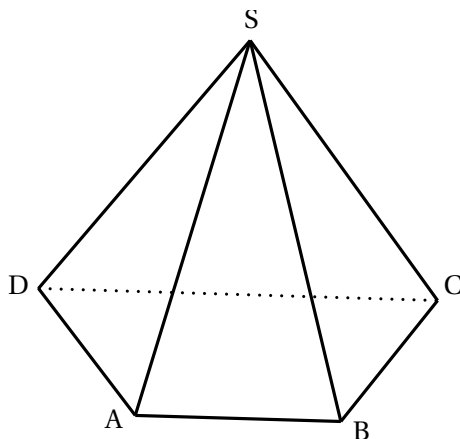
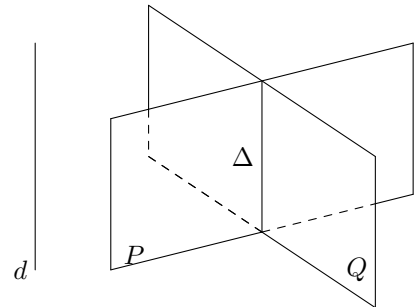


Solution :

Les plans (CDI) et (SAB) sont sécants selon la droite d . Or le plan (CDI) contient la droite (CD) et le plan (SAB) contient la droite (AB) , et les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles (comme supports des côtés du carré de base de la pyramide). D'après le théorème du toit, la droite d est donc parallèle à la droite (AB) .

Corollaire 1.

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.



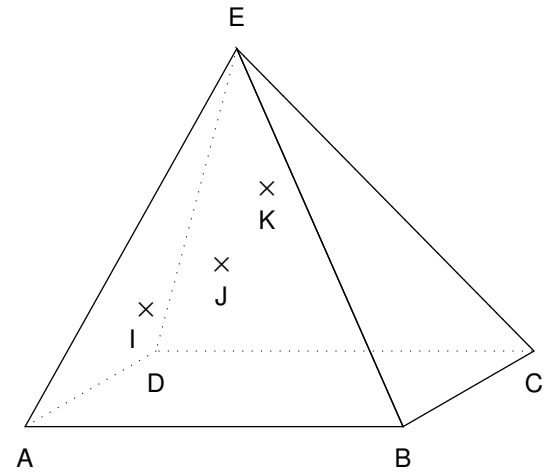
Exercice 19 :

$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un trapèze tel que $(AB) \parallel (CD)$.
Démontrer que la droite (CD) est parallèle au plan (SAB) .

Exercice 20 : On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.

On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).

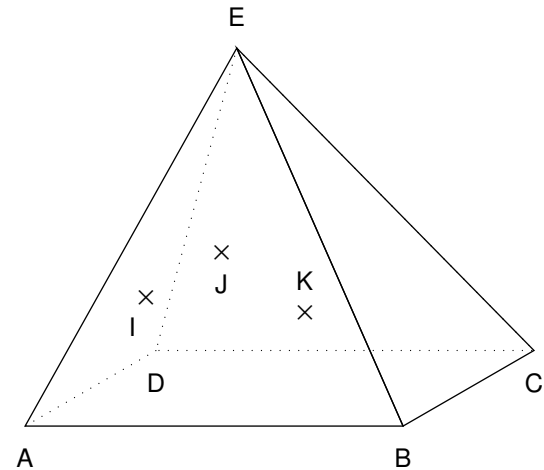
1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2.
 - a. Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
La tracer.
 - b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.
 - c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$.
3. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.



Exercice 21 : [Pour les experts] On considère une pyramide de base ABCD et de sommet principal E, et I et J deux points de la face ABE et K un point de la face CDE, comme sur la figure ci-contre.

On se propose de tracer l'intersection de (IJK) et de (ABCDE).

1. Pouvez-vous le faire sans indication supplémentaire ?
2.
 - a. Caractériser l'intersection (Δ) des plans (ABE) et (CDE).
La tracer.
 - b. Placer $L = (IJ) \cap (\Delta)$. Donner trois plans auxquels L appartient.
 - c. En déduire $(IJK) \cap (CDE)$. La tracer
3.
 - a. Placer $M = (IJ) \cap (ABC)$.
 - b. En déduire $(IJK) \cap (ABC)$.
4. Tracer l'intersection de (IJK) et de la pyramide.



Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 21 + 22 + 23 + 24 p 32

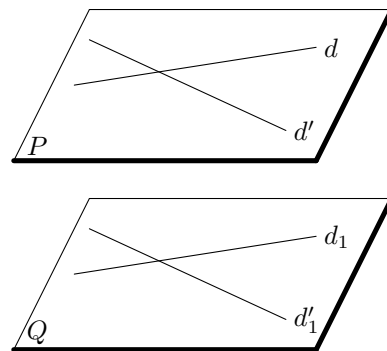
IV.2. Parallélisme entre plans

Théorème 3.

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 4.

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

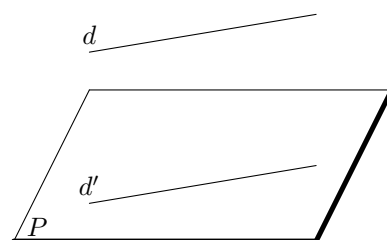


Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 25 + 26 p 32

IV.3. Parallélisme entre droites et plans

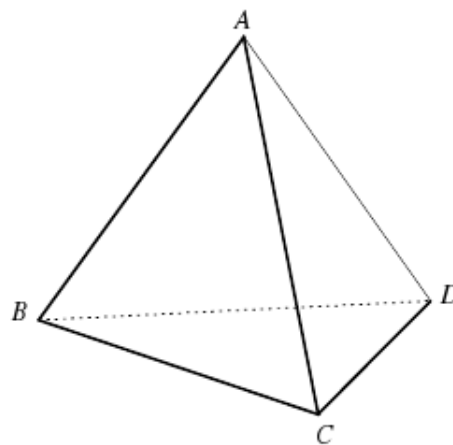
Théorème 5.

Si une droite d est parallèle à une droite d', alors la droite d est parallèle à tout plan P contenant la droite d'.




Exercice du Cours : Soient ABCD un tétraèdre et I, J, K, M et N les milieux respectifs de [AB], [AC], [AD], [BD] et [CD].

1. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
2. Déterminer les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'intersection des plans (ACM) et (BCD) puis (ACM) et (IJK).
3. Démontrer que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.
4. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$.
5. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
6. Démontrer que les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles.



Exercice(s) du livre : Hyperbole : n° 27 p 32

V) D'autres solides

 **Travail de l'élève 8** : En classe entière, par groupe de quatre avec des squelettes de faces carrés, triangulaires, pentagonal.

? Question :

Construire avec les pièces devant vous ou avec du papier : un cube, un tétraèdre, un octaèdre, un dodécaèdre, un icosaèdre, un **pavé**, une **pyramide à base carrée**, un **cylindre**, un **cône**, une **sphère**.

Pour chacun de ceux en gras, faire une fiche dans laquelle vous donnerez lorsque c'est possible :

- ↔ le nombre de faces et de sommets,
- ↔ un patron,
- ↔ un dessin en perspective cavalière,
- ↔ la formule de la surface,
- ↔ celle du volume

Mémo

- ↔ Quels sont les points communs des cinq premiers solides ?
- ↔ Le cube est un pavé régulier
- ↔ Le tétraèdre et la pyramide à base carrée sont des pyramides particulières
- ↔ La pyramide à base carré n'est pas possible avec notre matériel, pb de longueur
- ↔ Impossible de faire le cylindre et le cône autrement qu'avec le papier pour nous
Possibilité de rouler une feuille dans le sens de la longueur puis de la largeur et de comparer les volumes des deux différents cylindre en les remplissant de pop corn ou autre. Rappels sur le cercle (périmètre et aire), difficile de parler de face ou de sommet ...
- ↔ Impossibilité de construire la sphère
- ↔ Avez-vous tous les mêmes patrons ?
- ↔ Quelles sont les règles de la perspective cavalière ?

Les patrons

Un patron de solide est obtenu en plaçant toutes ses faces dans un même plan.

Remarques :

- ↔ Un même solide peut avoir plusieurs patrons possibles (non superposables).
- ↔ Certains solides n'ont pas de patrons : c'est le cas de la sphère.

**En perspective cavalière :**

1. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins ; les autres sont dessinés en pointillés.

2. Conservation de l'alignement et du parallélisme :

↪ Des points alignés sont représentés par des points alignés.

Attention ! Des points alignés sur le dessin ne le sont pas forcément dans la réalité !

↪ Deux droites de l'espace parallèles (dans un plan) sont représentées par deux droites parallèles.

↪ Des droites concourantes (dans un plan) sont représentées par des droites concourantes.

Attention ! Des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas forcément dans la réalité !

3. Conservation des proportions de distance :

↪ Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.

↪ Dans un plan de face, une figure est représentée à l'échelle, dans les autres plans, les tailles sont réduites proportionnellement.

Attention ! Les angles ne sont pas conservés (sauf dans le plan de face)

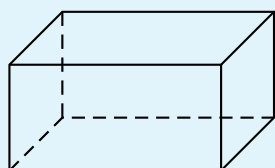
Remarque : Ainsi un rectangle pourra être représenté par un parallélogramme en perspective cavalière.

L'énoncé et le codage seront donc importants pour comprendre une figure.

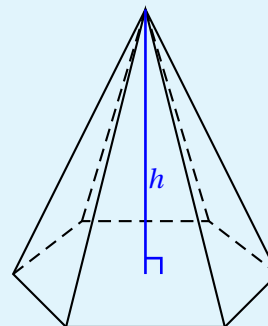
Quelques solides et leur volume (cf formulaire p 290-291)

Parallépipède rectangle : $V = \text{aire de la base} \times h$

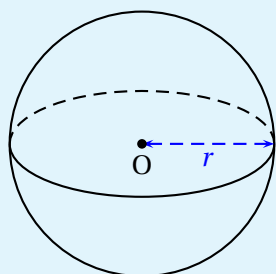
$$V = L \times l \times h$$



Pyramide : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$



Sphère : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

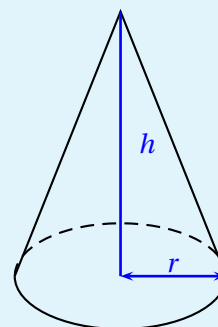
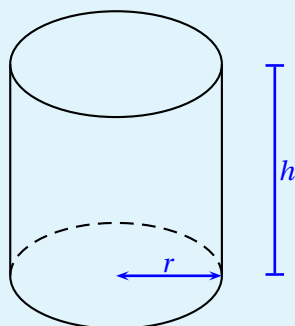


Cône : $V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times h$

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

Cylindre de révolution : $V = \text{aire de la base} \times h$

$$V = \pi \times r^2 \times h$$




Exercices du livre :

n°34 p 33

Exercice 22 : On a écrit un algorithme à l'aide du logiciel Algotbox. Voici ce qui a été saisi :

```
1  VARIABLES
2  Rayon EST_DU_TYPE NOMBRE
3  Hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
4  Volume EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  AFFICHER "Entrer le rayon"
7  LIRE Rayon
8  AFFICHER "Entrer la hauteur"
9  LIRE Hauteur
10 Volume PREND_LA_VALEUR Math.PI*pow(Rayon,2)*Hauteur/3
11 AFFICHER "Le Volume est égal à "
12 AFFICHER Volume
13 FIN_ALGORITHME
```

1. Que fait cet algorithme ?
2. Quelles sont les variables en entrée ?
3. Quelles sont les variables en sortie ?
4. En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme affichant :
 - a. Le volume d'une boule lorsque l'on saisit le rayon ;
 - b. L'aire latérale totale d'un cylindre de révolution lorsque l'on saisit le rayon du disque de base et la hauteur.

 **Exercice 23** : Aller voir la calculatrice électronique de surface sur côté maison, qui calcule la surface de peinture nécessaire en fonction des murs à peindre et de leur surface évidemment.

VI) Rappels de la géométrie plane

VI.1. Quadrilatères



Définition 2.

Un **quadrilatère** est un polygone qui a quatre côtés (donc quatre sommets)



Définition 3.

Un **trapèze** est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles.



Définition 4.

Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux parallèles.



Propriété 1.

- ↪ Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- ↪ Les côtés d'un parallélogramme sont deux à deux de même mesure.



Reconnaître un parallélogramme

ABCD est un quadrilatère.

1. Si les côtés de ABCD sont deux à deux parallèles alors ABCD est un parallélogramme.
2. Si les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, alors ABCD est un parallélogramme.
3. Si ABCD est un quadrilatère non croisé et que ses côtés sont deux à deux de même longueur, alors ABCD est un parallélogramme.
4. Si ABCD est un quadrilatère non croisé et qu'il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors ABCD est un parallélogramme.



Définition 5.

Un **rectangle** est un parallélogramme avec un angle droit.



Propriété 2.

- ↪ Un rectangle possède donc les propriétés du parallélogramme.
- ↪ Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.
- ↪ Un rectangle possède 4 angles droits.

Définition 6.

Un **losange** est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.

Propriété 3.

↪ Un losange possède donc les propriétés du parallélogramme.

↪ Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

↪ Un losange possède quatre côtés de même mesure.

Définition 7.

Un **carré** est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange (donc un parallélogramme).

Définition 8.

Un carré possède donc les propriétés du parallélogramme, du rectangle et du losange.

Exemple :

Dessiner à la règle et au compas un quadrilatère quelconque, un parallélogramme, un rectangle, un losange et un carré.

VI.2. Triangles

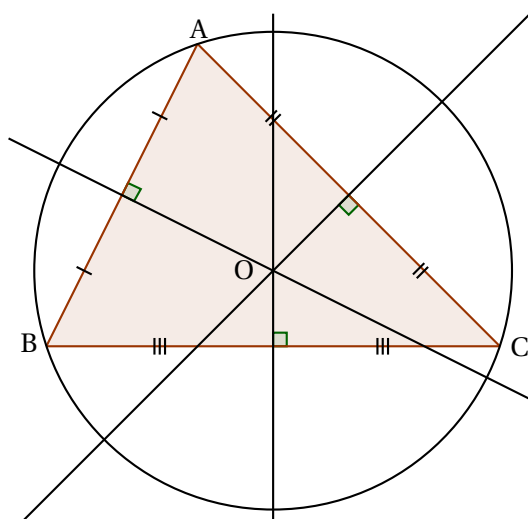
VI.2.a. Droites remarquables du triangle

Définition 9.

La **médiatrice** du segment $[AB]$ est la droite coupant ce segment perpendiculairement en son milieu.

Propriété 4.

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point O qui est le **centre du cercle circonscrit** à ce triangle.



Remarques :

↪ La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B . Autrement dit, un point M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AM = MB$.

↪ Sur la figure ci-dessus, on en déduit que $OA = OB = OC$.

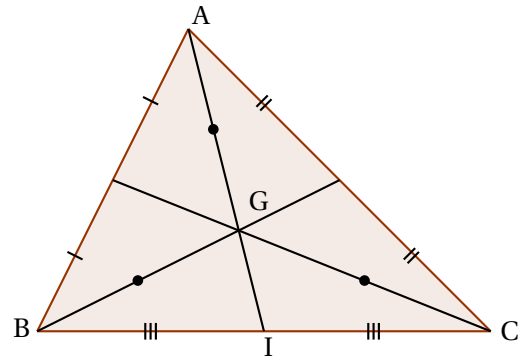
- ↪ Pour construire la médiatrice d'un segment [AB] au compas, on construit un losange de diagonale [AB] (on trouve ses deux autres sommets, il est inutile de tracer les côtés). La médiatrice de [AB] est alors l'autre diagonale du losange.

Définition 10.

Dans un triangle ABC, la **médiane** issue du sommet A est la droite passant par A et par le milieu I du côté opposé [BC].

Propriété 5.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G appelé le **centre de gravité** du triangle.



Remarques :

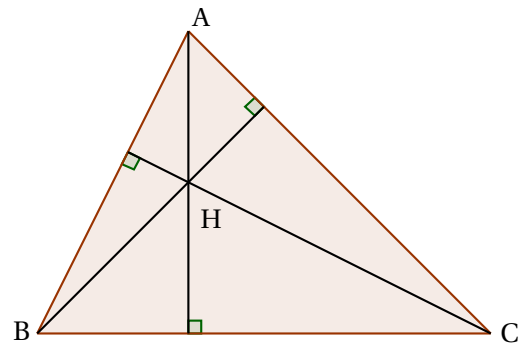
- ↪ G se trouve aux deux tiers de la médiane [AA'] en partant de A : $AG = \frac{2}{3}AA'$.
- ↪ Pour construire le milieu d'un segment [AB] au compas, on construit en fait la médiatrice de [AB] au compas, comme indiqué si dessus (inutile de la tracer, on ne demande que le milieu de [AB]).

Définition 11.

Dans un triangle ABC, la **hauteur** issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire au côté opposé [BC].

Propriété 6.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé l'**orthocentre** du triangle.

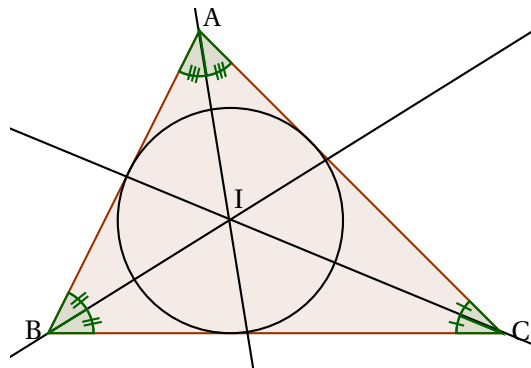


Définition 12.

La **bissectrice** d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Propriété 7.


Les trois bissectrices sont concourantes en un point I qui est le **centre du cercle inscrit** dans le triangle.



Remarque : Pour construire la bissectrice d'un angle \widehat{ABC} , on construit en fait un losange de côtés [AB] et [BC] (on trouve son dernier sommet, il est inutile de tracer ses côtés). La bissectrice de \widehat{ABC} est la diagonale du losange passant par B.


 **Théorème 6.**

Dans un triangle ABC isocèle en A, les droites remarquables du triangle issue de A sont confondues.

VI.2.b. Le triangle rectangle **Propriété 8.**

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.
Il s'agit du plus grand côté du triangle.

Remarque : Tant que l'on n'a pas prouvé qu'un triangle est rectangle (ou que ce n'est pas dit dans l'énoncé), on ne peut pas parler d'hypoténuse.

 **Propriété 9.**


Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle (c'est donc aussi le point de concours des médiatrices).

On peut donc en déduire que dans un triangle ABC rectangle en A avec O le milieu de [BC] on a

$$OA = OB = OC$$

Réciproque : Un triangle inscrit dans un demi-cercle avec pour côté un diamètre de ce cercle est un triangle rectangle (d'hypoténuse ce diamètre).

Faire une figure illustrant ce théorème.

 **Théorème 7.** (Pythagore (-580 à -500))

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque : Si dans un triangle ABC on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Contraposée : Si dans un triangle ABC on a $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

 **Définition 13.** (Trigonométrie)

Si ABC est un triangle *rectangle* en A alors :

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC} \quad \sin \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB} \quad \tan \hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{CA}{BA}$$

VI.2.c. Triangles « proportionnels »

Théorème 8. (des milieux)

- ↪ La droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté de ce triangle.
- ↪ Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté alors elle passe par le milieu du troisième côté du triangle.

Théorème 9. (Thalès (-627 à -547))

Soit ABC un triangle et M et N deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC), distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

Réciproque : Si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ et si les points A, B, M et A, C, N sont alignés dans le même ordre alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

VI.3. Symétries

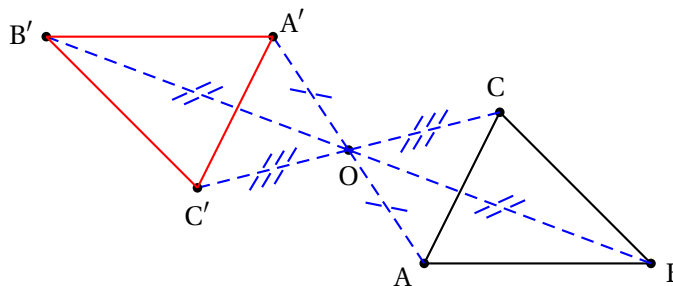
Définition 14.

M' est l'image du point M par la **symétrie de centre** O signifie que O est le milieu de [MM'].

Propriété 10.

La symétrie centrale conserve :

- ↪ l'alignement,
- ↪ les longueurs,
- ↪ le parallélisme,
- ↪ les angles géométriques et orientés.



Définition 15.

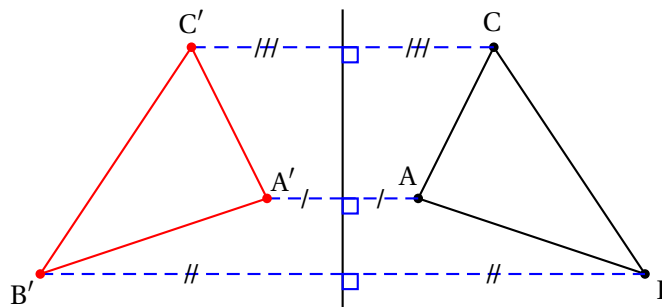
M' est l'image du point M par la **symétrie d'axe** Δ signifie que la droite Δ est la médiatrice du segment [MM'].

Propriété 11.

La symétrie axiale conserve :

- ↪ l'alignement,
- ↪ les longueurs,
- ↪ le parallélisme,
- ↪ les angles géométriques.

Par contre, elle inverse les angles orientés.



Remarques :

- ↪ « Etant donnée un carré, construire un carré d'aire double. »
Selon Platon, Socrate aurait proposé ce problème à un esclave afin de démontrer que la connaissance est en chacun de nous.
- ↪ On raconte que pour enrayer une épidémie de peste qui décimait Athènes, les habitants de l'île de Délos décidèrent de doubler le volume de l'autel dédié à Apollon. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que l'on a démontré que cette construction était impossible à la règle non graduée et au compas !

Exercices du livre :

n° 6-7 p 30 + 28 - 29 - 30 - 32 - 33 p 33

VII) Quelques exercices d'applications

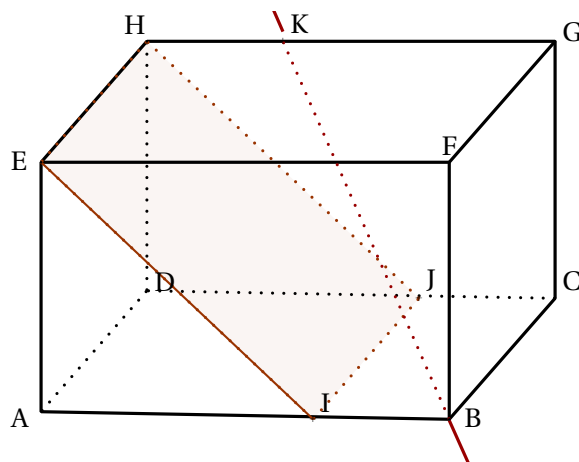
VII.1. Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

Exercice 24 :

Dans un pavé droit ABCDEFGH, on place les points I, J et K respectivement sur les arêtes [AB], [CD] et [GH] tels que :

$$BC = CJ = HK$$

1. De quelle nature est le quadrilatère IBKH ?
2. Que peut-on dire des droites (BK) et (IH) ?
3. En déduire que la droite (BK) est parallèle au plan (HIJ).

**Solution :**

1. Comme $HK = IB$ et comme $(HK) // (IB)$ le quadrilatère $IBKH$ a deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.
2. $IBKH$ est un parallélogramme, donc $(KB) // (IH)$.
3. (KB) est parallèle à une droite du plan (HIJ) , elle est donc parallèle au plan (HIJ) .

**Exercice 25 :**

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soit I et J les points situés respectivement sur $[AB]$ et sur $[AH]$ tels que :

$$AI = \frac{1}{4}AB \quad \text{et} \quad AJ = \frac{1}{4}AH$$

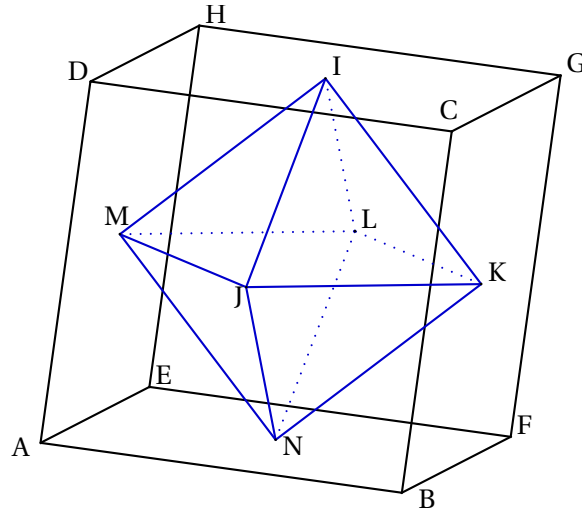
Démontrer que $(IJ) // (BFH)$

VII.2. Démontrer que des plans sont parallèles.**Exercice 26 :**

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

Soit I, J, K, L, M et N les centres respectifs des faces du cube (voir ci-dessous). Le solide $IJKLMN$ est un octaèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). On veut démontrer que les faces opposées de l'octaèdre sont parallèles.

1. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (HC) .
2. Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (MN) .
3. Démontrer que les plans (IKL) et (JMN) sont parallèles.

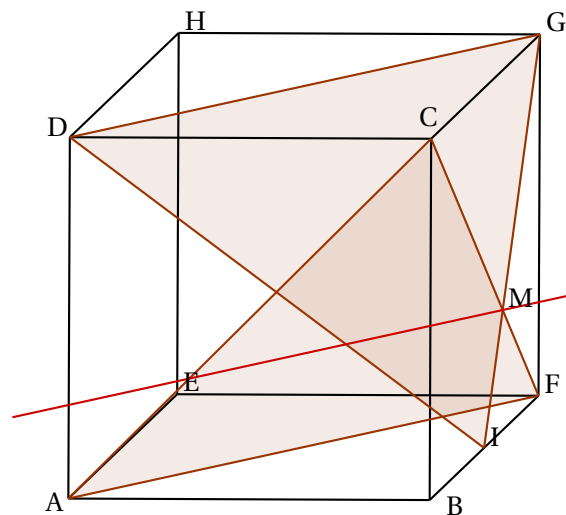
**Solution :**

1. Dans le triangle HFC : I est le milieu de [HF] et K celui de [FC]. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(IK) \parallel (HC)$.
2. Dans le triangle AHC : N est le milieu de [AC] et M celui de [AH]. Par le théorème des milieux, on en déduit que $(MN) \parallel (HC)$. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles. Donc $(IK) \parallel (MN)$.
3. De la même manière, on démontre que (JN) et (IL) sont parallèles. Ainsi, dans le plan (IKL), se trouvent deux droites sécantes, qui sont respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (JMN) : on en déduit que les plans (IJK) et (JMN) sont parallèles.
Ce résultat reste vrai pour toute paire de faces opposées de l'octaèdre.

VII.3. Déterminer l'intersection de deux plans**Exercice 27 :**

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de l'arête [BF].

Déterminer et tracer l'intersection des plans (AFC) et (DIG).



**Solution :**

On commence par chercher un point commun aux deux plans.

La droite (GI) est contenu dans les plans (DIG) et (BFG). De même la droite (CF) est contenu dans les plans (AFC) et (BFG). Par conséquent (CF) et (GI) sont sécantes, en un point que l'on appellera M (elles ne peuvent en aucun cas être parallèles).

Il est difficile, ici, de trouver un deuxième point commun. En revanche on remarque que $(DG) \parallel (AF)$ car ces droites portent les diagonales de deux faces opposées du cube.

Or $(DG) \subset (DIG)$ et $(AF) \subset (AFC)$, d'après le théorème du toit, on en conclut que la droite d'intersection des plans (DIG) et (AFC) est parallèle aux deux droites (DG) et (AF).

On peut ainsi tracer la droite recherchée : c'est la droite passant par le point M et parallèle aux droites (DG) et (AF).

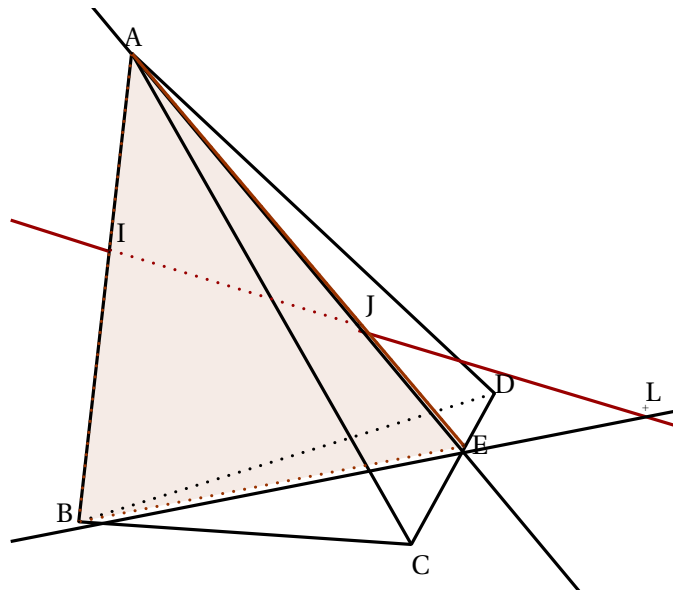
**Exercice 28 :**

Soit SABCD une pyramide dont la base ABCD est un trapèze avec $(AB) \parallel (CD)$. Déterminer l'intersection des plans (SAC) et (SBD), puis des plans (SAB) et (SCD).

VII.4. Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan**Exercice 29 :**

Soit $aBCD$ un tétraèdre. I est un point de l'arête [AB]. J est un point de la face ACD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD).

Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

**Solution :**

On cherche un plan auxiliaire, contenant la droite (IJ) et coupant le plan (BCD) ; ici le plan (AIJ) convient.

La droite (IJ) n'est pas contenu dans le plan (BCD) et n'est pas parallèle au plan (BCD) donc elle est sécante au plan (BCD).

La droite (AJ) coupe la droite (CD) en un point qu'on appelle E (on observe ici la face ACD).

Les droites (IJ) et (BE) sont toute entière contenu dans le plan (AIJ) et comme (IJ) n'est pas parallèle au plan (BCD), la droite (IJ) est sécante avec la droite (BE). Notons L l'intersection de (BE) et (IJ). L est alors le point cherché.