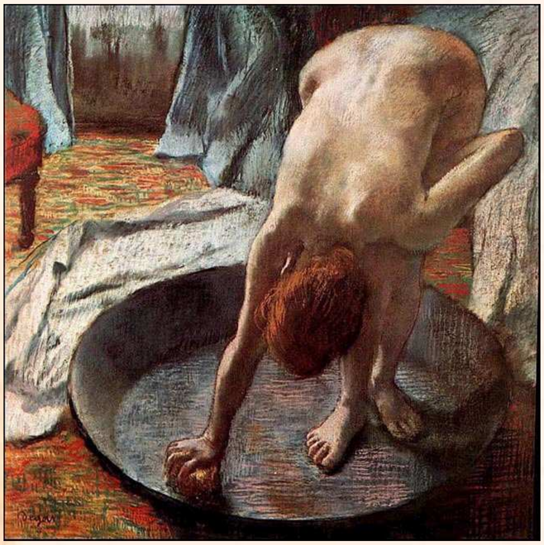
CHAPITRE 6

SOUVENT FONCTION VARIE ...

HORS SUJET



Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

TITRE : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »
AUTEUR : EDGAR DEGAS
PRÉSENTATION SUCCINTE : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Etablir graphiquement des tableaux de variations
- ⇝ Déterminer des extrema (locaux ou non) et préciser lorsqu'ils sont atteints
- ⇝ Evaluer la cohérence entre tableau de variations, tableau de signes et tableaux de valeurs d'une fonction
- ⇝ Tracer des courbes compatibles avec les informations que l'on a sur une fonction.
- ⇝ Découvrir le vocabulaire du sens de variation d'une fonction
- ⇝ Comparer des images à partir d'un tableau ou du sens de variation d'une fonction, manipuler des inégalités

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

Chapitre 6:

Souvent fonction varie ...

Introduction

On a déjà appris à résumer le signe d'une fonction dans un tableau (graphiquement ou par le calcul). Désormais, on souhaite résumer succinctement le comportement de la courbe représentative d'une fonction dans un tableau.

I) Tableau de variations d'une fonction

Travail de l'élève 1 : Simone, une élève de seconde, a trouvé la copie de son amoureux Norbert, un élève de première ES. Dedans, Norbert a dessiné le tableau suivant, qui décrit succinctement une fonction f à étudier, mais il n'a pas écrit de laquelle il s'agissait.

x	-6	-2	0	1	2	5
Variations de f	5 ↘	1 ↗	3 ↘	0 ↘	-4 ↗	2

1. Quel semble-t-être l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Que peuvent signifier les flèches, d'un point de vue graphique ?
3. **Image**
   a. Pouvez-vous donner l'image de 5 par f ?
   Si oui, précisez sa valeur, si non, quelle information possédez-vous tout de même ?
   b. Même question avec 1, 3, -1 puis avec -6.
4. **Antécédent(s)**
   a. Pouvez-vous donner un antécédent de 5 par f ? Lequel ?
   5 possède-t-il d'autres antécédents par f ?

b. Déterminer le nombre d'antécédents de 1 par f, ainsi que la valeur de chacun lorsque c'est possible, sinon quelle information possédez-vous tout de même ?

c. Même question avec 3, -1, puis avec -6.

5. **Extrema : minimum et maximum**

   a. Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-6;0]$? Préciser quand il est atteint.

   b. Même question sur $[-6;1]$ puis sur $[-6;5]$.

   c. Quel est le maximum de la fonction f sur son ensemble de définition ? Préciser quand il est atteint.

   d. Le tableau est-il à l'échelle ?

6. **Tableau de signes** : Simone veut dresser le tableau de signes de f.

   a. Expliquer pourquoi c'est impossible.

   b. Plus loin sur sa copie, Norbert a écrit $f(4) = 0$.
   Rajouter cette information dans le tableau ci-dessus.

   c. Dresser alors le tableau de signes de f.

7. **Courbe compatible** : Simone veut dessiner une courbe représentative d'une fonction f compatible avec toutes les informations ci-dessus.

   a. Quel tableau de valeurs de f pouvez-vous établir à partir du tableau de Norbert ?

   b. En déduire sept points par lesquels passe la courbe représentative de f.

   c. Dessiner alors une courbe représentative d'une fonction f compatible avec les informations ci-dessus.

   d. Avez-vous tous la même ?

Conclusion

Un tableau de **variations** d'une fonction f définie sur un ensemble D_f décrit les variations graphiques de f. Autrement dit, il indique quand la courbe représentative de f monte ou descend.

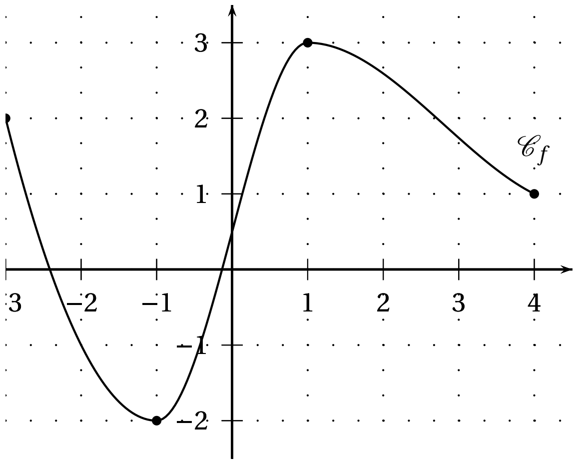
- $\rightsquigarrow$ La première ligne contient dans l'ordre croissant les valeurs extrêmes de x où f est définie, ainsi que celles où elle change de sens de variation.
- $\rightsquigarrow$ La seconde ligne contient des flèches qui montent ou descendent, suivant si la courbe représentative de f monte ou descend.
- $\rightsquigarrow$ A chaque extrémité des flèches, on rajoute les images des x correspondants, lorsque l'on peut les calculer.
- $\rightsquigarrow$ Eventuellement, on précise les valeurs interdites par une double barre verticale.
- $\rightsquigarrow$ Parfois, on rajoute des valeurs intermédiaires, pour rassembler toutes les informations dans un seul tableau.

Remarque : Il ne faut pas confondre le tableau de **variations** d'une fonction f avec son tableau de **signes** : ce dernier décrit le signe d'une fonction f. Autrement dit, il indique quand une fonction f est :

- $\rightsquigarrow$ positive (ie les x tels que $f(x) > 0$) : sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses (axe horizontal)
- $\rightsquigarrow$ négative (ie les x tels que $f(x) < 0$) : sa courbe est en-dessous de l'axe des abscisses
- $\rightsquigarrow$ nulle (ie les x tels que $f(x) = 0$) : sa courbe coupe l'axe des abscisses

Exemple :

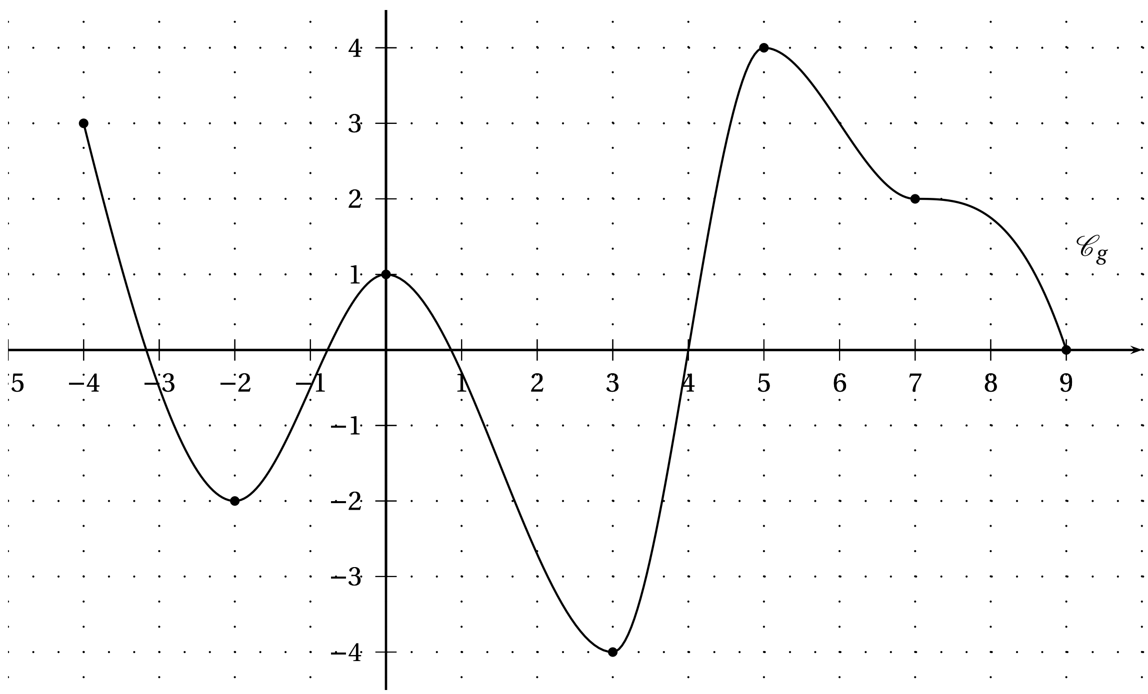
f est définie sur $[-3;4]$ par sa courbe représentative :



Le tableau de variations de f est :

x	-3		-1		1		4
Variations de f	2	↘		↗	3	↘	
			-2				1

Exercice du Cours : Soit g la fonction définie par la courbe ci-dessous.



1. Etablir graphiquement le tableau de signes de la fonction g sur $[-4;9]$.
2. Etablir graphiquement le tableau de variations de la fonction g sur $[-4;9]$.

II) Extrema

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in \mathrm{I}$.

Définition 1.

Le **maximum** d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la plus grande valeur des images, atteinte en un réel $a \in \mathrm{I}$.
Ainsi, pour tous réels $x \in \mathrm{I}$ on a : $f(x) \leq f(a)$.

Le **minimum** d'une fonction f sur un intervalle I est s'il existe, la plus petite valeur des images, atteinte pour un réel a de I.
Ainsi, pour tous réels $x \in \mathrm{I}$ on a : $f(x) \geq f(a)$.

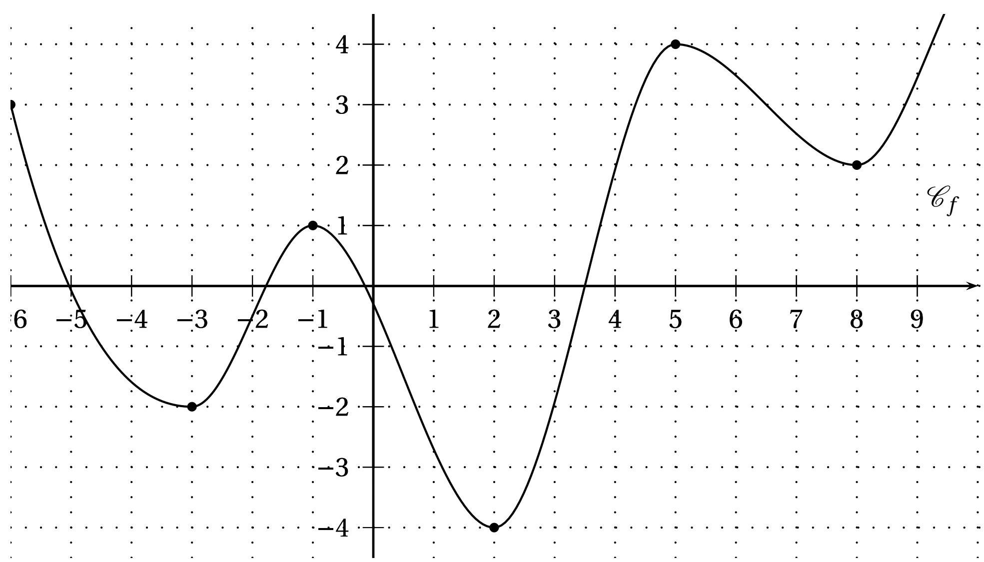
Remarque : On parle d'extremum lorsque la fonction admet soit minimum, soit maximum.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, graphiquement on lit que le maximum de g sur $[-4;9]$ est 4 atteint quand $x=5$, son minimum est -4 atteint quand $x=3$.
Sur $[-3;1]$, le maximum de g est 1 atteint quand $x=0$, son minimum est -2 atteint en -2.
Sur $[-4;4]$, le maximum de g est 3 atteint quand $x=-4$, son minimum est -4 atteint en 3.

<u>**Exercice du Cours**</u> : Soient h et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2+3$ et $v(x)=-x^2+3$.

1. Etablir graphiquement leurs tableaux de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Lire leurs éventuels extrema sur $\mathbb{R}$, et préciser quand ils sont atteints.
3. Pouvez-vous les retrouver par le calcul ?

<u>**Exercice 1**</u> : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-dessous. **Synthèse sur les lectures graphiques**



1. **Signe** :
   a. Etablir graphiquement le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c.auperin@wicky-math.fr.nf

b. En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes :

$$f(x)=0 \qquad f(x)>0 \qquad f(x)\geq 0 \qquad f(x)<0 \qquad f(x)\geq 0$$

2. (In)équations :
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

$$f(x)=-3 \qquad f(x)\geq -3 \qquad f(x)\leq 3 \qquad f(x)=2 \qquad f(x)>2 \qquad f(x)\geq 2$$

3. Extrema :

a. Lire le maximum de f sur $[-5;0]$ et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

b. Même question sur $[-4;6]$.

c. Reprendre les deux questions précédentes pour le minimum de f.

4. Variations :
Etablir graphiquement le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : On donne les deux tableaux suivants pour une fonction f. On sait de plus : $f(-1)=2$ et $f(4)=1$

x	-6		1		3		5
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

x	-6		-2		0		1		2		5
Variations de f	5	↘	1	↗	3	↘	-1	↘	-4	↗	2

1. Corriger le tableau de variations de f afin d'enlever toute incohérence entre les informations ci-dessus.

2. Préciser les extrema de f et les valeurs où ils sont atteints

3. Dessiner une courbe représentative de f compatible avec toutes les informations.

Exercice 3 : Même exercice que précédemment avec une fonction g et les informations suivantes.

x	-4		0.5		3
Signe de $g(x)$		−	0	+	

x	-4		-2		0		1		3
Variations de g	-5	↗	-2	↘	-1	↗	3	↘	2

De plus l'image de -3 est -6 et le seul antécédent de 4 est 2.

Exercice 4 : On donne le tableau de variations d'une fonction f suivant.

x	-6		-3		-2		-1.5		1		2		4
Variations de f	‖	↘	5	↘	-2	↗	1	↗	3	↘	-4	↗	1

1. Préciser les éventuels maximum et minimum de f sur son ensemble de définition.
2. Tracer une courbe compatible avec ce tableau.
3. Etablir alors graphiquement un tableau de signes de la fonction f.

Exercice(s) du livre : (Hyperbole) $n^o\,1-2$ p 66 (tableaux à partir de courbes)
$n^o\,7-8$ p 66 (extrema à partir de la courbe ou du tableau de variations)

III) Sens de variation d'une fonction : vocabulaire et ordre

Travail de l'élève 2 : Dans un autre exercice, Norbert a dressé le tableau de variations d'une fonction f.

x	-15		-5		1		7		$+\infty$
Variations de f	-2	↗	7	↘	-5	↗	1	↘	

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Norbert prétend que $f(2) = 3$. Simone n'est pas d'accord.
   Expliquer et proposer une valeur cohérente avec le tableau pour l'image de 2 par la fonction f.
3. Norbert a également établi le tableau de signes suivant de la fonction f.

x	-15		-6		-1		8		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

   Simone prétend qu'il contient deux incohérences avec le tableau de variations de f.
   Expliquer et proposer un tableau de signes cohérent avec le tableau de variations de f.
4. Simone prétend qu'elle ne connait ni l'image de 2, ni l'image de 3, mais qu'elle peut tout de même les comparer (savoir lequel est le plus grand). Expliquer.
5. Sur sa copie, Norbert a écrit :

   ⇝ $f(3) < 1$ ⇝ $f(2) < -3$ ⇝ $f(-10) > f(-8)$ ⇝ $f(0) < f(2)$
   ⇝ $f(9) > 1$ ⇝ $f(-2) > f(0)$ ⇝ $f(-8) > f(-2)$ ⇝ $f(2) < f(3)$

   Simone n'est pas toujours d'accord. Qu'en pensez-vous ?
6. Soient a et b deux nombres réels d'un intervalle I. Compléter les phrases suivantes.
   Dans un tableau de variations, si les variations de f sur l'intervalle I sont représentées par
   - ⇝ une flèche qui monte et que $a < b$ alors $f(a)$......$f(b)$
     L'ordre des images et des antécédents est ...
     On dit que f est ...
   - ⇝ une flèche qui descend et que $a < b$ alors $f(a)$......$f(b)$
     L'ordre des images et des antécédents est ...
     On dit que f est ...

⇝ plusieurs flèches de sens différents, alors ...
On dit que f est ...

7. Dessiner une courbe compatible avec celle représentative de f.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 2.

On dit que f est **strictement croissante** si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre.
On retiendra qu'**une fonction strictement croissante conserve l'ordre** des images et des antécédents. Autrement dit, si $a, b \in \mathrm{I}$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

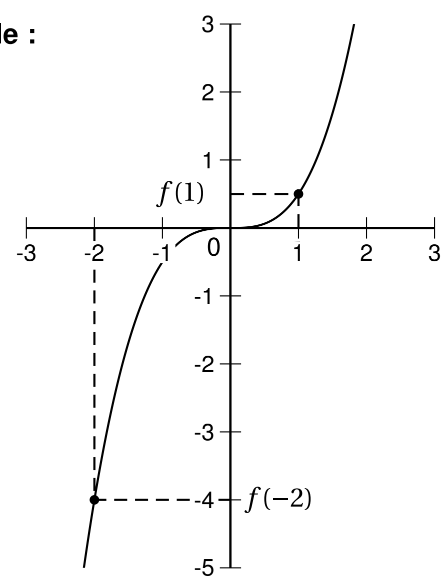
Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction strictement croissante sur un intervalle I « monte »

Remarques :

⇝ De même $a > b \Longrightarrow f(a) > f(b)$ (ce qui compte c'est la *conservation* de l'ordre inital qui est **connu** en général)

⇝ Un fonction f est simplement dite croissante lorsque $a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$
Graphiquement, cela se traduit par un passage horizontal de la courbe représentant f.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.5x^3$.
Sa représentation graphique nous montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On sait que $-2 < 1$ et f strictement croissante sur $[-2;1]$ donc

$$f(-2) < f(1)$$

Autrement dit, on peut affirmer que

$$0.5 \times (-2)^3 < 0.5 \times (1)^3$$

sans faire de calculs.

Définition 3.

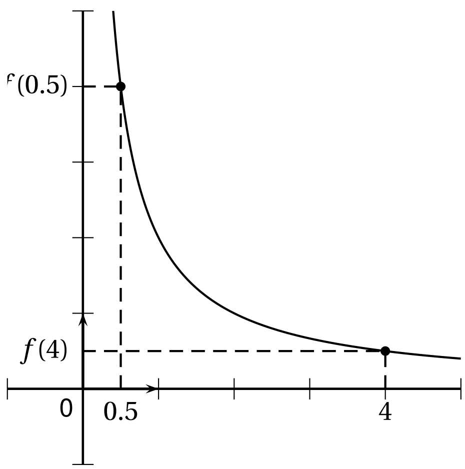
On dit que f est **strictement décroissante** si pour tous réels a et b de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans l'ordre inverse.
On retiendra qu'**une fonction strictement décroissante inverse l'ordre** des images et des antécédents. Autrement dit, si $a, b \in \mathrm{I}$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

Graphiquent, la courbe représentative d'une fonction strictement décroissante sur un intervalle I « descend »

Remarque : Une fonction f est simplement dite décroissante lorsque $a < b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{0.5x}$.

Sa représentation graphique nous montre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On sait que $0.5 < 4$ et f strictement décroissante sur $[0.5;4]$ donc

$$f(0.5) > f(4)$$

On peut donc affirmer que

$$\frac{1}{0.5 \times 0.5} > \frac{1}{0.5 \times 4}$$

sans faire de calculs.

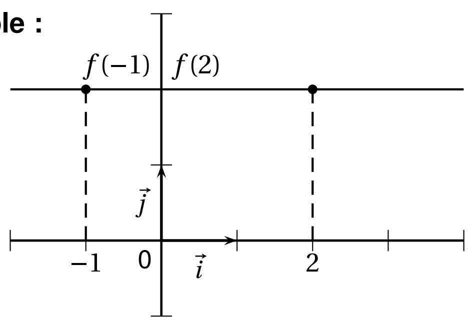
Définition 4.

On dit que f est **constante** si pour tous réels a et b de I, leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont égales.
Autrement dit, si $a, b \in \mathrm{I}$ alors :

$$a < b \Longrightarrow f(a) = f(b)$$

Graphiquent, la courbe représentative d'une fonction constante égale à k sur un intervalle I est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = k$

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$.

On sait que f constante égale à 2 sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(-1) = f(2) = f(-1000\pi) = 2$$

Remarques :

- On résume les variations d'une fonction grâce à un tableau de variations, les flèches représentant un sens de variation strict.
- Lorsqu'une fonction change de sens de variation sur un intervalle I, on dit qu'elle est **non monotone** sur I.
  A contrario, une fonction **monotone** sur I est donc une fonction dont le sens de variation ne change pas sur I : elle est soit uniquement croissante sur I, soit uniquement décroissante sur I, soit constante sur I.
- On ne parle de sens de variation que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.
- Si on sait qu'une fonction f est strictement monotone sur un intervalle I et que l'on connait son sens de variation sur I, alors pour tous nombres a et b connus on peut connaître l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sans les calculer (conservation ou changement de l'ordre).
- Si on connait l'ordre deux de nombres a et b d'un intervalle I et l'ordre de leurs images $f(a)$ et $f(b)$, on ne peut rien dire sur la monotonie de f (on ne sait pas ce qui se passe pour les autres réels de I).

Exercice 5 : Soit z la fonction définie par $z(x) = \dfrac{3}{x-3}$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Après avoir tracer cette fonction sur votre calculatrice, décrire les variations de z (par des phrases).
3. Résumer cela dans un tableau de variations de z.
4. Rajouter une ligne au tableau pour décrire le signe de z.

Exercice 6 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction « carré » à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

$$x^2 \leq 3 \qquad x^2 \geq 2 \qquad 1 \leq x^2 \leq 5$$

Exercice 7 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction « inverse » à partir de sa courbe représentative sur votre calculatrice
2. Trouver à l'aide du graphique les solutions des inéquations suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \qquad -1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 8 : Soit la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = -(x-2)^2 + 3$
2. En déduire le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $[-2;5]$
4. Compléter le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$\cdots$	10	$+\infty$
Variations de f					

5. Grâce à ce tableau de variation, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
6. Grâce à la courbe résoudre graphiquement cette équation.
7. Par dichotomie, donner un encadrement à 10^{-2} de ces solutions.
8. Retrouver ces nombres par le calculs
9. Vérifier la cohérence des trois méthodes.

Exercice(s) du livre : $n^o\, 3-4-5$ p 66 (lecture d'informations dans le tableau)
$n^o\, 28$ p 70 (calcul d'images pour le tableau)
$n^o\, 35$ p 71 (quantificateurs)
QCM et Vrai-Faux p 72 + 42 à 44 p 73
$n^o\, 19-21$ p 85 (fonction carré)
$n^o\, 40-42$ p 86 (fonction inverse)

IV) Fonctions affines

IV.1. Sens de variation

Travail de l'élève 3 : Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = -3x+5$.
On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

1. Calculer $f(b) - f(a)$
2. Etudier le signe de l'expression trouvée.
3. En déduire l'ordre de $f(b)$ et $f(a)$, puis le sens de variation de f
4. En suivant la même méthode, établir le sens de variation de g.
5. Conjecturer le sens de variation d'une fonction affine (distinguer les cas).

Propriété 1.

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$.

1. Si $a < 0$, alors f inverse l'ordre $\mathbb{R}$, ie f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $a > 0$, alors f est conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$, ie f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve
Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On cherche à savoir si $f(x) = ax+b$ et $f(y) = ay+b$ sont dans le même ordre. Pour cela, on étudie le signe de $f(y) - f(x)$.

$$f(y) - f(x) = ay + b - (ax+b) = a(y-x)$$

Comme $x < y$, on sait que $(y-x) > 0$. Donc :

- Si $a > 0$ alors $a(y-x) > 0$ et on en déduit $f(y) - f(x) > 0 \iff f(x) < f(y)$ pour tous réels $x < y$.
  Les images et les antécédents par f sont rangés dans le même ordre, donc f conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors $a(y-x) < 0$ et on en déduit $f(y) - f(x) < 0 \iff f(y) < f(x)$ pour tous réels $x < y$.
  Les images et les antécédents par f sont rangés dans l'ordre inverse, donc f inverse l'ordre sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors $a(y-x) = 0$ et on en déduit $f(y) = f(x)$ pour tous réels x, y.
  Les images et les antécédents par f sont tous égaux, donc f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

On peut dresser le tableau de variations d'une fonction affine en fonction du signe de a.

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $ax+b$	$\searrow$	

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $ax+b$	$\nearrow$	

Remarque : Les fonctions affines non constantes ne possèdent pas d'extrema.

Exemple :

On donne les fonctions f et g définies par $f(x)=-3x-\frac{5}{8}$, $g(x)=87\,968x-\sqrt{5\,468}$.

1. Donner, sans calculatrice, l'ordre des images des nombres :

a. 1 et 5 **b.** $\sqrt{10}$ et $-\pi$ **c.** $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$

2. Donner, sans calculatrice, l'ordre des antécédents des nombres :

a. $-\frac{45}{987}$ et $-\frac{45}{65498}$ **b.** $\sqrt{180}$ et $2\sqrt{98}$ **c.** $\frac{3^4\times5^{13}}{15^7}$ et $\frac{5^3\times3^{10}}{15^{10}}$

Exercice 9 : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1)=3$ et $f(-2)=-1$

1. Peut-on en déduire que f est croissante sur $[-2;1]$?

2. On sait de plus que f est une fonction affine. Peut-on alors connaitre son sens de variation sur $\mathbb{R}$?

3. Retrouver l'expression de f.

Mêmes questions pour une fonction g affine telle que $g(-2)=9$ et $g(3)=-11$.

Exercice(s) du livre : n^o 14 p 67

IV.2. Représentation graphique

Travail de l'élève 4 : Sur Géogébra, construire la droite passant par les points $\mathrm{A}(0;2)$ et $\mathrm{B}(1;-3)$.
Afficher l'équation de la droite.
Laisser A fixe quelques temps et déplacer B.
Conjecturer les lectures graphiques de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur.
Afficher la pente si nécessaire.

Dans cette partie, f désigne une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$. On appelle d sa représentation graphique.

Propriété 2. (Définition)

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
La droite d représentant la fonction affine f a pour équation réduite est $y=ax+b$.
a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.

Remarque : Dire que d a pour équation $y=ax+b$ signifie qu'un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A})$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d, ie si et seulement si $y_\mathrm{A}=ax_\mathrm{A}+b$.

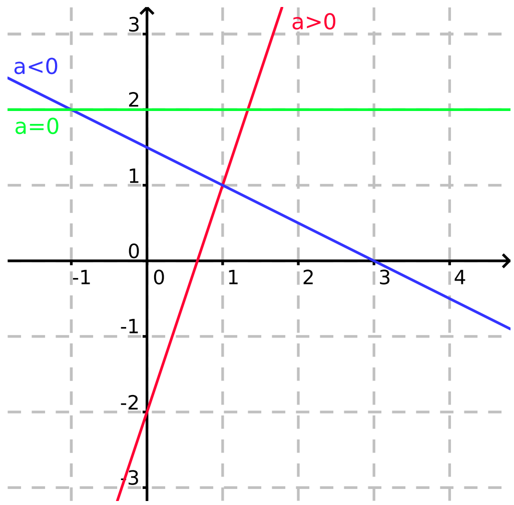
Exemple :

Soit $\mathrm{F}abrice$ la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}abrice(x)=2x-1$ et d sa représentation graphique.
Donner la nature de d, son équation, son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
Dire si les points $\mathrm{A}(-3;6.9)$ et $\mathrm{B}(200;399)$ appartiennent à d.
Donner les coordonnées de trois autres points de d.

Grâce au tableaux de variations établis dans la partie précédente, on sait que l'on a trois types d'orientation possibles pour la droite d, en fonction du signe du coefficient directeur a.

Attention : Une droite verticale ne peut pas représenter une fonction affine !

Si $b = 0$, alors d passe par l'origine du repère. Elle représente une fonction affine particulière : une fonction linéaire. Il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression du type $f(x) = ax$.

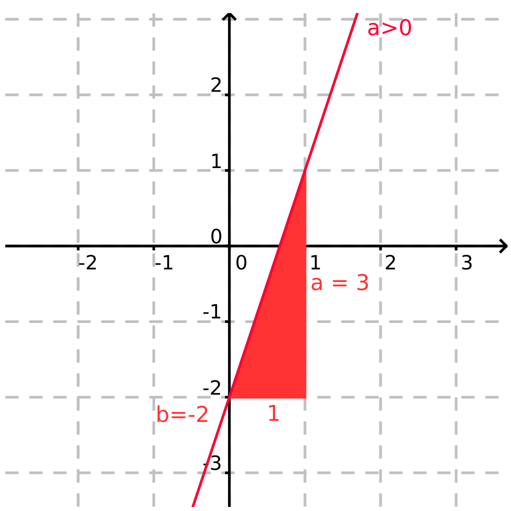


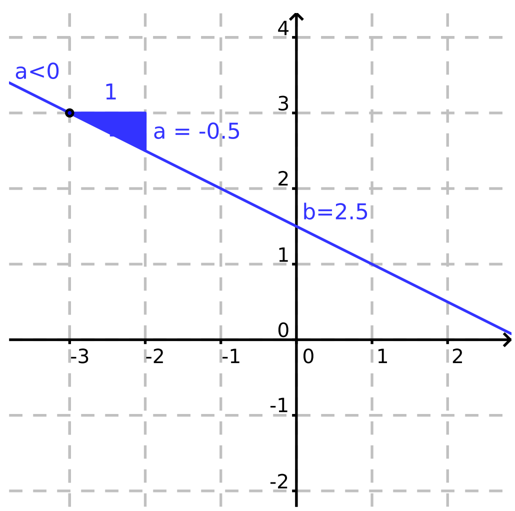
Interprétation graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine :

On choisit au hasard deux points sur la droite d séparés d'une unité en abscisse.

Le **coefficient directeur** représente le nombre d'unités verticales les séparant (en allant de gauche à droite).

L'**ordonnée à l'origine** est l'ordonnée du point d'intersection de d avec l'axe des ordonnées, ie du point de d d'abscisse 0.





Méthode pour tracer la représentation graphique de la fonction affine f

On a deux méthodes :

- Choisir deux nombres x_1 et x_2, calculer leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, placer les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ dans un repère, puis les relier à la règle.
- Placer le point sur l'axe des ordonnées d'ordonnée b, puis placer une deuxième point de la droite en utilisant l'interprétation graphique du coefficient directeur a.

Exercice 10 :

1. Dans un repère, tracer la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$.
   Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite (AB). En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Trouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD). *Vérifier graphiquement.*

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 1$.

1. Trouver les images de 0 et de -2 par la fonction f.
2. Calculer $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$.
3. Trouver les éventuels antécédents de 0 et -2 par la fonction f.
4. Résoudre $f(x)=\dfrac{4}{3}$.
5. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et contrôler graphiquement les résultats précédents.

Exercice(s) du livre : $n^o\,5-6-7$ p 60 (tracer une fonction affine, déterminer une fonction affine, vérifier qu'une fonction est affine)
$n^o\,55$ à 57 p 76 : Défi (retrouver des fonctions affines)
$n^o\,26-33$ p 69-71 (problèmes avec fonction affine par morceaux)
$n^o\,20$ p 68 (Algorithme de tracé à faire en module)