

EXERCICES : SUITES NUMÉRIQUES

I. Méthode de génération - travail sur les indices

Exercice 1. On considère les suites u , v , w et s définies par :

$$\begin{array}{l}
 - \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \\
 - v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \\
 - \begin{cases} w_0 = -\frac{1}{2} \\ w_n = 4 + w_{n-1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^* \\
 - s_n = 5 - 2n, \quad n \in \mathbb{N}^*
 \end{array}$$

1. Pour la suite u

- (a) Calculer les 5 premiers termes de la suite u .
- (b) Exprimer u_{n+4} en fonction de u_n .
- (c) En déduire u_8 ; u_{12} ; u_{16} et u_{20} .
- (d) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$
- (e) Représenter à l'aide de la fonction f et de la droite $\mathcal{D} : y = x$ les premiers termes de la suite dans un repère.

2. Pour la suite v

- (a) Calculer les 5 premiers termes de la suite v .
- (b) Calculer v_{10} et v_{17} .
- (c) Ecrire un algorithme permettant le calcul du terme de rang n où n est un entier choisit par l'utilisateur.

3. Pour la suite w

- (a) Calculer les 5 premiers termes de la suite w .
- (b) Exprimer w_{n+5} en fonction de w_n .
- (c) En déduire w_5 ; w_{10} ; w_{15} et w_{20} .
- (d) Déterminer la fonction f telle que $w_{n+1} = f(w_n)$.
- (e) Représenter à l'aide de la fonction f et de la droite $\mathcal{D} : y = x$ les premiers termes de la suite dans un repère.
- (f) Conjecturer une formule donnant w_n en fonction de n ; vérifier votre conjecture sur les premiers termes de la suite.

4. Pour la suite s

- (a) Calculer les 5 premiers termes de la suite s .
- (b) Calculer s_1 ; s_2 ; s_3 et s_{10} .
- (c) Conjecturer une formule donnant le terme de rang s_{n+1} en fonction de s_n .
- (d) Déterminer la fonction f telle que $s_n = f(n)$.
- (e) Déterminer le sens de variation de la suite s .
- (f) Déterminer la fonction g telle que $s_{n+1} = g(s_n)$.
- (g) Représenter à l'aide de la fonction g et de la droite $\mathcal{D} : y = x$ les premiers termes de la suite dans un repère.

Exercice 2. On donne :


$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 15 \quad ; \quad u_4 = 31 \quad ; \quad u_5 = 63 \quad ; \quad u_6 = 127$$

1. Donner u_7 .
2. Proposer une formule donnant u_{n+1} en fonction de u_n . Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.
3. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n . Vérifier qu'elle est correcte sur les premiers termes.

Exercice 3. On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0}$ définies par les algorithmes suivant :

PARTIE A.

La suite u




Algorithme 1 :

Données: u_0, u_1 et u sont des nombres réels.
 i et n sont des nombres entiers, n est supérieur ou égal à 2.
 $u_0 := 1$
 $u_1 := 2$
 Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 $u := 5u_1 - 6u_0$ puis $u_0 := u_1$ et $u_1 := u$
 Afficher u
Fin Pour

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme?
2. Que fait cet algorithme?
3. Donner une définition de la suite u par récurrence.
4. Proposer une définition explicite de u_n en fonction de n .
5. Modifier l'algorithme pour qu'il n'affiche que le terme de rang n .

PARTIE B.

La suite v



Algorithme 2 :

Données: v est un nombre réel.
 i et n sont des nombres entiers naturels.
 Entrer n
 $v := \cos\left(n \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n \frac{\pi}{3}\right)$
 Afficher v .

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme?
2. Que fait cet algorithme?
3. Compléter :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{4n} = \dots\dots \\ v_{4n+1} = \dots\dots \\ v_{4n+2} = \dots\dots \\ v_{4n+3} = \dots\dots \end{array} \right.$$

Exercice 4. La suite u est définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2 - 3n$

Exercice 5. On considère les suites w et s définies par les algorithmes suivants :

PARTIE A.

La suite w



Algorithme 3 :

Données: w est un nombre réel.
 i et n sont des nombres entiers naturels.
 Entrer n
 $w := 4 \times (-1)^n + 1$
 Afficher w .

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme?
2. Que fait cet algorithme?
3. Compléter :

$$\begin{cases} w_{2n} = \dots\dots \\ w_{2n+1} = \dots\dots \end{cases}$$

PARTIE B.

La suite s



Algorithme 4 :

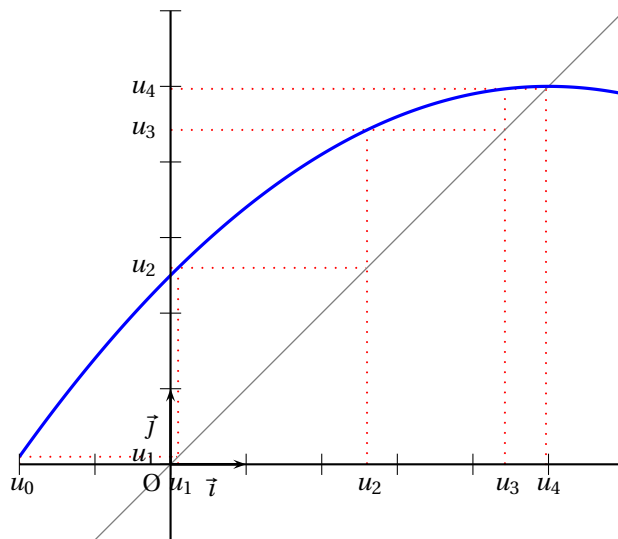
Données: s est un nombre réel.
 i et n sont des nombres entiers naturels.
 $s := -1$
 Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 $s := \sqrt{\frac{1+s}{2}}$
 Afficher s
Fin Pour

1. Si l'utilisateur saisit l'entier $n = 5$, qu'affiche l'algorithme?
2. Que fait cet algorithme?
3. Donner une définition de la suite u par récurrence.
4. Modifier l'algorithme pour qu'il n'affiche que le terme de rang n .

II. Représentation graphique

Exercice 6.

1. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la représentation graphique \mathcal{C}_f d'une fonction f ($\mathcal{C}_f : y = -0,1(x-5)^2 + 5$) et la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$. On a représenté les cinq premiers termes de la suite u définie par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n .



- (a) Donner, par lecture graphique, u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- (b) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n , puis calculer les valeurs des termes u_1 à u_4 à partir de la valeur u_0 lue à la question précédente.
- (c) On modifie la valeur $u_0 = 0$. Calculer les premiers à partir de u_0 .
- (d) Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u avec donc $u_0 = 0$.

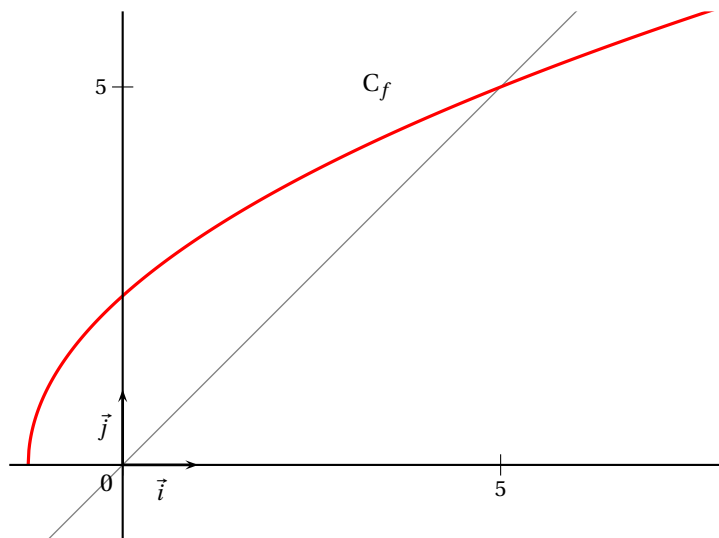
Exercice 7. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$

Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Dans le repère ci-dessous on a tracé la représentation graphique \mathcal{C}_f de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

- 1. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u .
- 2. Conjecturer le sens de variation de la fonction u .
- 3. Conjecturer la valeur limite ℓ de la suite u .



Exercice 8. On considère la suite u définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

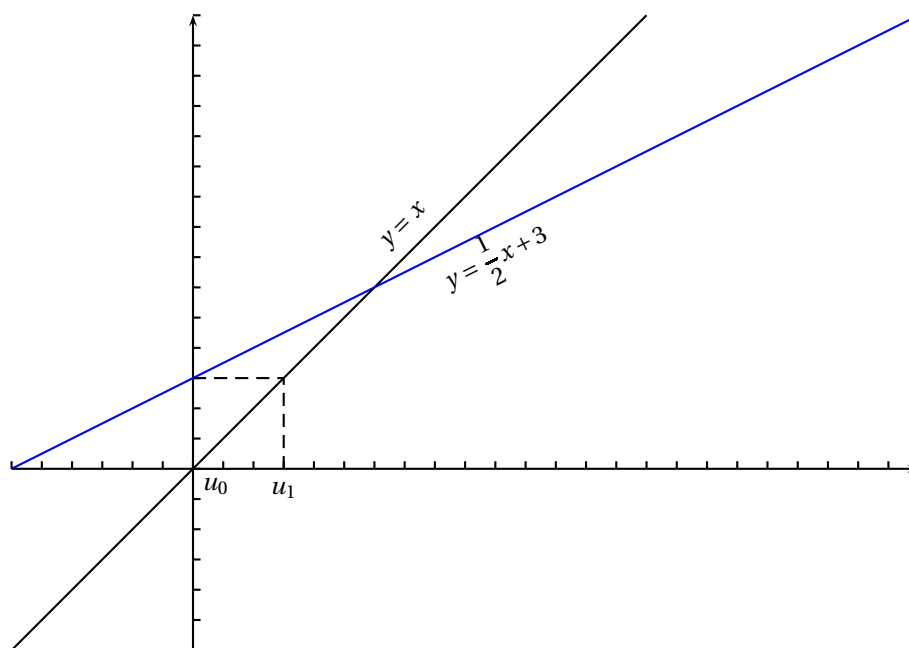
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 0$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u .
3. Dans un repère, en utilisant la représentation graphique de la fonction f , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u pour $a = 15$. Dans ce cas conjecturer le sens de variation de la suite u .
4. Que constate-t-on ?

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. Sur la figure ci-dessous, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$. A partir de u_0 , en utilisant ces deux droites, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
3. Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?



III. Sens de variation

Exercice 10. Etudier le sens de variation de la suite u dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 3 - 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3. $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_n = -2 + 5n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

4. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11.

1. La suite u est définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{10}{n}$$

En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite u est décroissante à partir de $n \geq 1$.

2. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - n^2$ est décroissante à partir d'un certain rang à préciser.

3. Montrer que la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - 10n + 16$ est croissante à partir d'un certain rang à préciser.

4. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3n + 1$.

(a) Montrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang à préciser en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) Etudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ et retrouver le résultat précédent.

5. La suite u est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - n$.

Montrer que la suite u est croissante.

IV. Limite

Exercice 12. Sans justification, dans chaque cas, déterminer si la suite converge en précisant sa limite éventuelle :

1. La suite u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

2. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = (-1)^n \times n$$

3. La suite w est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = n - \frac{1}{n+1}$$

4. La suite s est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$s_n = \frac{1}{n}$$

5. La suite t est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$t_n = (-1)^n + n$$

6. La suite p est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$p_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Exercice 13. Une suite u est décroissante et converge vers 0.

La suite v est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.

Dans chaque cas, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s) :

1. Si la suite v a tous ces termes positifs alors :

- (a) La suite v est décroissante. (b) La suite v est convergente. (c) La suite v a une limite $\ell < 0$.

2. Si La suite v est croissante alors :

- (a) la suite v a tous ses termes négatifs ou nuls. (b) la suite v est convergente. (c) la suite v converge vers 0.

Exercice 14. Proposer un exemple de suite u telle que :

1. u est décroissante et converge vers 1. 3. u diverge vers $-\infty$.
2. u n'admet pas de limite. 4. u est croissante et converge vers π .

Exercice 15. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = -1 + \frac{1}{n}$$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u .
2. On donne l'algorithme suivant :

**Algorithme 5 :**

Données: u est un nombre réel.
 p est un nombre entier naturel.
 ε est un nombre réel strictement positif. $u := 0$
 et $p := 1$
 Entrer ε
Tant que ($u \notin]-1 - \varepsilon; -1 + \varepsilon[$) **Faire**
 $u := -1 + \frac{1}{p}$ et $p := p + 1$
Fin Tant que
 Afficher $p - 1$.

- (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $\varepsilon = 0.3$? $\varepsilon = 0,1$? $\varepsilon = 10^{-3}$?
 (b) Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait :

$$u_n \in]-1 - \varepsilon; -1 + \varepsilon[$$

- (c) Que vient-on de démontrer?

Exercice 16. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 - 3$$

1. Conjecturer la limite ℓ de la suite u .
2. On donne l'algorithme suivant :

**Algorithme 6 :**

Données: u est un nombre réel.
 p est un nombre entier naturel.
 A est un nombre réel strictement positif.
 $u := -3$ et $p := 0$
 Entrer A
Tant que ($u < A$) **Faire**
 $u := p^2 - 3$ et $p := p + 1$
Fin Tant que
 Afficher $p - 1$.

- (a) Qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre $A = 30$? $A = 1000$? $A = 10^6$?
 (b) Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait :

$$u_n > A$$

- (c) Que vient-on de démontrer?

Exercice 17. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :


$$u_n = 1 - 3n$$

Rédiger un énoncé d'exercice sur le modèle des deux précédents, puis répondre à chacune des questions.

V. Un exemple de devoir

Exercice 18.

1. On considère la suite u définie par l'algorithme suivant :



Algorithme 7 :

Données: u est un nombre réel.
 i et n sont des nombres entiers naturels.
 $u := 5$
 Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
 $u := \frac{2}{3}u + 1$
 Afficher u
Fin Pour

- (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 4$?
 (b) Que fait cet algorithme ?
2. On considère la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

- (a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
 (b) Dans un repère à l'aide de la représentation graphique de la fonction f et la droite $\mathcal{D}: y = x$ (que l'on tracera), placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite u .
 (c) Conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite ℓ .
3. **On admet que** la suite u peut se définir pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$$

- (a) Vérifier cette formule en calculant u_0 ; u_1 ; u_2 et u_3 .
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

- (c) En déduire le sens de variation de la suite u .

Exercice 19.

Lors d'une soirée de ski nocturne, Augustin apprend à prendre le téléski en snowboard.

La première fois, il parcourt 40 mètres.
 Puis, à chaque tentative, il réussit à tenir sur la perche 5 mètres de plus que la fois précédente.

Le téléski mesure 300 mètres de long.

- Combien devra-t-il faire de tentatives pour arriver au sommet ?
- Le téléski avance à la vitesse de 4 mètres par seconde.
 Combien de temps Augustin aura-t-il passé sur le téléski ?

Exercice 20. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$$

1. A l'aide des droites $\mathcal{D} : y = x$ et $\mathcal{D}' : y = 2x - 2$ donnée ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3 .
2. Conjecturer la limite de la suite u .
3. Calculer les 4 premiers termes de la suite u .



Algorithme 8 :

Données: u est un nombre réel.
 p est un nombre entier naturel.
 A est un nombre réel strictement positif. $u := 3$
 et $p := 0$
 Entrer A
Tant que ($u < A$) **Faire**
 $u := 2u - 2$ et $p := p + 1$
Fin Tant que
 Afficher p .

4.

- (a) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $A = 30$?
- (b) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $A = 100$? s'il entre $A = 10000$?

