# EXERCICES : SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

## I. Suites Arithmétiques

**Exercice 1.** Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 4n$ ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^2 - 1$ ;
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n+1)^2 - n^2$ ;
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 5n + 1$ ;
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{n}{n+1}$ ;
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n+1}$ ;

**Exercice 2.** Calculer la somme $A = 100 + 103 + 106 + \cdots + \cdots + 400$.

**Exercice 3.** Une entreprise parisienne doit envoyer un certain nombre de colis en province. Un transporteur propose les conditions suivantes :
98 €pour le premier colis et une réduction de 3 €pour chaque colis supplémentaire.

1. Combien coûte l'envoi de 10 colis ?
2. Le budget transport de l'entreprise est de 50000 €. Combien de colis l'entreprise peut-elle envoyer ?

**Exercice 4.** Soit $u$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $r$. Déterminer la limite de la suite $u$, lorsque :

1. $u_0 = -2$ et $r = -3$ ;
2. $u_0 = 2$ et $r = -3$ ;
3. $u_0 = -3$ et $r = 2$ ;
4. $u_0 = 3$ et $r = 2$.

## II. Suites Géométriques

**Exercice 5.** Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, déterminer le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{2}{5^n}$ ;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ ;
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -w_n + 3$ et $w_0 = -4$ ;
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 5^{2n+3}$ ;
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$ ;

**Exercice 6.** Calculer la somme $B = 21 + 63 + 189 + \cdots + 137781$

**Exercice 7.** Soit $v$ une suite arithmétique de premier terme $v_0$ et de raison $q$. Dans chaque cas, préciser si la suite $v$ admet une limite. Si oui, la déterminer.

1. $v_0 = 2$ et $q = 3$ ;
2. $v_0 = 2$ et $q = -3$ ;
3. $v_0 = -2$ et $q = 0.5$ ;
4. $v_0 = 3$ et $q = -\dfrac{5}{7}$.

**Exercice 8.** Calculer la somme des puissances de 2 comprises entre 100 et 200.

## III. Exercices d'applications

**Exercice 9.**

1. Calculer les sommes suivantes :

   (a) $S = 3+7+11+\cdots+199+203$ (b) $S = 11+22+44+\cdots+360448$

2. Quelle est la somme des multiples de 7 compris entre 100 et 2000 ?

**Exercice 10.** Soit $u$ la suite arithmétique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = -10$. Soit $v$ la suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $v_0 = -2$ et enfin $w$ la suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

1. Déterminer le sens de variation des suites $u$, $v$ et $w$.
2. Déterminer les limites des suites, $u$, $v$ et $w$.
3. Déterminer le rang à partir duquel :

   (a) $u_n \geq 10^6$ ; (b) $v_n \leq -10^6$ ; (c) $|w_n| \leq 10^{-6}$.

**Exercice 11.** Pour couvrir un toit conique, un couvreur dispose les ardoises en rangées successives en partant du bas. Le nombre d'ardoises nécessaires pour chaque rangée est donnée par les termes d'une numérique $u$ : la première rangée comporte $u_1 = 213$ ardoises, la deuxième comporte $u_2 = 207$ ardoises, la troisième comporte $u_3 = 201$ ardoises… et ainsi de suite en suivant la même progression.

1. Quelle est la nature de la suite $u$ ?
2. Sachant que la dernière rangée comporte 9 ardoises, déterminer le nombre total de rangées à mettre en place pour couvrir le toit.
3. Calculer le nombre total d'ardoises nécessaires pour couvrir le toit.

**Exercice 12.** On considère la suite $u$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+5}$$

1. (a) Calculer les 7 premiers termes de la suite $u$ .
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le signe de $u_n$, le sens de variation et la convergence de $u$ ?
   (c) Calculer les 7 premiers termes de la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite $v$ ?
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$ on a $u_n > 0$.
3. (a) Montrer que la suite $v$ est une suite arithmétique. On donnera sa raison.
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
4. (a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   (b) Etudier le comportement à l'infini de la suite $v$, puis celui de la suite $u$.

**Exercice 13.** On partage un carré de côté 1 en quatre carrés de même taille et on noircit le carré inférieur gauche. On applique le même procédé au carré en haut à droite. Et ainsi de suite. Quelle sera l'aire de la partie noire lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction ?

**Exercice 14.** Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bails.
1er contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
2ème contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail [1].

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, i.e le loyer du 36ème mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (*Justifier par des calculs*)

**Exercice 15.** On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

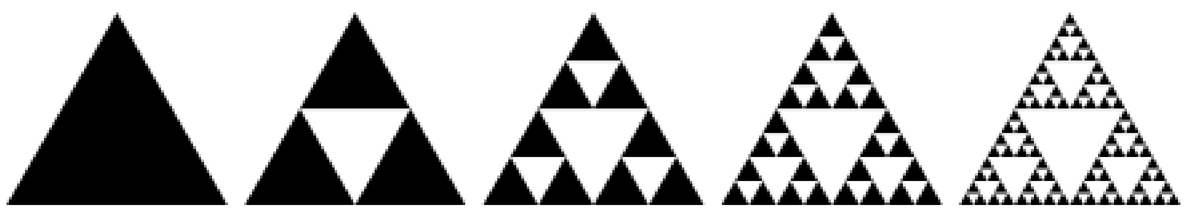
$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n \qquad \forall n \geq 1$$

1. Calculer $u_2$ ; $u_3$ ; $u_4$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ ; en déduire $u_{64}$.
3. **La légende du jeu d'échec** : *Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la* $64^{ième}$ *case. Le roi sourit de la modestie de la demande.*
   Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

**Exercice 16.** Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de $1,24\%$ en 100 ans.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, de 2000 ans et de 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devrait contenir en carbone 14. Estimer son âge.

**Exercice 17.** Premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski :



1. On note $u$ la suite qui donne le nombre de triangle noir à l'étape $n$. Quelle est la nature de $u$ ; préciser ses éléments caractéristiques.
2. On note $v$ la suite qui donne la longueur d'un côté du triangle noir à l'étape $n$. Quelle est la nature de $v$ ; préciser ses éléments caractéristiques.
3. On note $w$ la suite qui donne l'aire d'un triangle noir à l'étape $n$. Quelle est la nature de $w$ ; préciser ses éléments caractéristiques.
4. On note $t$ la suite qui donne l'aire du domaine couvert par les triangles noirs à l'étape $n$. Quelle est la nature de $t$ ; préciser ses éléments caractéristiques.

1. Un bail est un contrat de location

# IV. Suites Arithmético-géométriques

**Exercice 18.** Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à aillette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.
On suppose que la population $u$ lors de l'année $n$ de Schblrurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année $n$ par un nombre réel $u_n$. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite $u$ pour différentes valeurs de la population initiale $u_0$ et des paramètres $a$ et $b$.
On cherche à estimer la population de Schblurbs dans l'avenir lointain, par deux techniques différentes dont l'une utilise la suite auxiliaire suivante :
la suite $v$ est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

1. **Cas 1** : $u_0 = 0,7$ ; $a = -0,2$ et $b = 0,4$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction $f$ et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite $u$.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite $u$.
   iv. Déterminer cette limite par le calcul.
   (c) Vérifier que, pour tout entier $n$, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{1}{3}$$
   (d) Montrer que $v$ est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{11}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$$
   (g) En déduire la limite $\ell$ de la suite $u$.
2. **Cas 2** : $u_0 = 0,7$ ; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction $f$ et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite $u$.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite $u$.
   (c) Vérifier que, pour tout entier $n$, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$
   (d) Montrer que $v$ est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$
   (g) En déduire la limite $\ell$ de la suite $u$.
3. **Cas 3** : $u_0 = 0,3$ ; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.

(a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction $f$ et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite $u$.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite $u$.

(c) Vérifier que, pour tout entier $n$, on a :

$$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$

(d) Montrer que $v$ est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

(g) En déduire la limite $\ell$ de la suite $u$. Conclure.

4. **Cas 4** : $u_0 = 0,3$ ; $a = -0,5$ et $b = 7$.

(a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction $f$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction $f$ et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite $u$.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite $u$.

iv. Déterminer cette limite par le calcul.

(c) Vérifier que, pour tout entier $n$, on a :

$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

(d) Montrer que $v$ est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

(g) En déduire la limite $\ell$ de la suite $u$. Conclure.

**Exercice 19.** Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1000$ et $v_{n+1} = 1,005 \times v_n + 30$. On considère l'algorithme ci-dessou :

**Algorithme 1 :**

**Données:** S est un nombre réel ; $n$ et $k$sont des nombres entiers naturels.
Saisir $n$
S := 1000 et $k$ := 0
**Tant que** ($k < n$) **Faire**
  $k := k + 1$ et S := 1,005 × S
**Fin Tant que**
Afficher S.

1. (a) Faire fonctionner l'algorithme pour $n = 4$. Obtient-on $v_4$ ?

(b) Transformer l'algorithme de façon à obtenir $v_n$ en fonction de $n$

2. On place 1000 €sur un livret qui rapporte 0,5% par mois, à la fin de chaque mois, on y verse, en plus, la somme de 30€. Ce livret est bloqué pour 5 ans, ce qui signifie que, sur cette période, il est impossible de retirer de l'argent. Donner la somme présente sur ce livret au terme du contrat.

3. On considère la suite $u$ définie par $u_n = v_n + 6000$.
   Démontrer que la suite $u$ est géométrique. En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis vérifier le résultat de la question précédente.

**Exercice 20.** Soit la suite $u$ définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$
Soit $v$ la suite définie pour tout entier $n$ par :

$$v_n = u_n - 2$$

1. Montrer que la suite $v$ est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
2. En déduire l'expression de $v_n$, puis de $u_n$, en fonction de $n$.
3. Etudier la limite de la suite $u$.

## V. Un exemple de devoir

### *Exercice 1* : 2 points

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+2011+2012 \qquad S_2 = 7+21+63+\cdots+45927$$

*On prendra soin de rédiger la réponse clairement. Notamment, pour* $S_2$*, on justifiera la formule utilisée en précisant la suite considérée ainsi que sa nature.*

### *Exercice 2* : 6 points

On souhaite construire un château de cartes à $n$ niveaux ($n \geq 1$). On a représenté ci-dessous un château à quatre niveaux. On appelle $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite dont chaque terme $u_n$ est égal au nombre de cartes du niveau $n$ en partant d'en haut. Ainsi $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$.

1. Déterminer $u_3$ et $u_4$ grâce au dessin.
2. Donner la nature de la suite $(u_n)$ ainsi que ses éléments caractéristiques *(inutile de justifier)*.
   **A partir de maintenant, toutes les réponses doivent être justifiées par des formules du cours et des calculs.**
3. (a) Combien de niveaux aura un château dont la dernière rangée est composée de 23 cartes ?
   (b) En déduire le nombre de cartes d'un tel château.
4. (a) Exprimer le nombre S de cartes d'un château à $n$ niveaux en fonction de $n$.
   *On prendra soin à n'avoir plus que la lettre n dans l'expression de* S.
   (b) Quelle est le nombre de niveaux du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes ?
   (c) Quelle sera alors le nombre de cartes de la rangée du bas ?

## *Exercice 3* : 2 points

La suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r$. On sait que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.

1. Calculer la raison $r$ et $u_0$.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + \cdots + u_{100}$

## *Exercice 4* : 3 points

Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$

1. Sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé, représenter les termes $u_0$ à $u_3$ de cette suite, en vous appuyant notamment sur la droite $\Delta : y = x$.
   *On ne fera aucun calcul de termes, Unité graphique : 2 cm sur chaque axe*
2. Cette suite semble-t-elle converger ?
3. Si oui, conjecturer graphiquement sa limite puis la retrouver par le calcul.

## *Exercice 5* : 5 points

Un capital $C_0 = 10\,000$€ est placé sur un compte coûtant 20€ par an pour frais de gestion, puis rapportant 4% à la fin de chaque année. On nomme $C_n$ le montant disponible sur le compte à la fin de la $n^{eme}$ année, après le versement des intérêts.

1. (a) Calculer $C_1$ puis $C_2$.
   (b) Justifier que pour tout $n \geq 0$ on a $C_{n+1} = 1.04C_n - 20.8$
2. On pose $u_n = C_n - 520$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Pour tout $n \geq 0$, exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
   (b) En déduire la nature de la suite $(u_n)$ et donner ses éléments caractéristiques.
   (c) Exprimer alors $u_n$ en fonction de $n$, puis $C_n$ en fonction de $n$.
3. Afficher sur votre calculatrice les premiers termes de la suite $(C_n)$ et en déduire au bout de combien d'années le capital aura au moins doublé.

## *Exercice 6* : 2 points

Etudier le sens de variation des suites de terme général suivant :

1. $u_n = n^2 - n$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 2$