

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

**Exercice 1.**

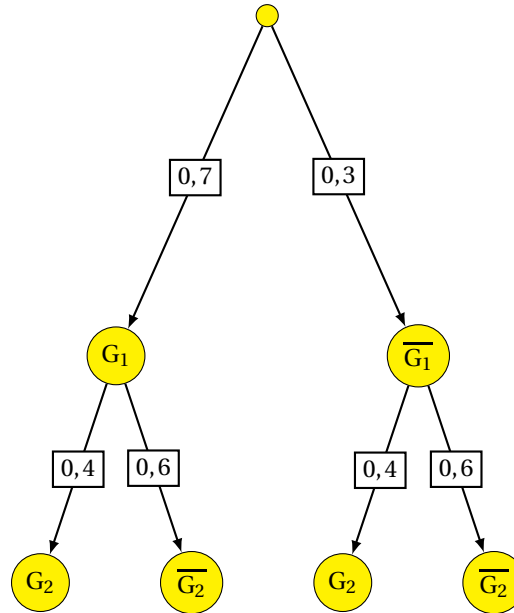
(10 points)

Igor, un champion de roller sous marin, s'inscrit au championnat du monde de la discipline. Il doit effectuer deux figures pour lesquelles il est particulièrement entraîné. Par expérience il sait qu'il a 70% de chance de réussir sa première figure, par contre il n'a que 40% de chance de réussir sa deuxième figure. Le gouvernement Syldave a décidé de récompenser son champion de la manière suivante :

- S'il réussit les deux figures, Igor reçoit la somme de 1000 € Syldave.
- S'il ne réussit qu'une figure, le gouvernement syldave récompense Igor d'un euro syldave.
- Sinon Igor doit au gouvernement syldave la somme de 2000 € Syldave.

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.

Notons  $G_i$ , pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , l'événement Igor réussit sa  $i$ -ème figure.



2. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse les deux figures.

Notons A l'événement « Igor réussit les deux figures ». Dans ce cas :

$$p(A) = p(G_1 \cap G_2) = 0,7 \times 0,4 = \frac{28}{100} = 0,28$$

3. Calculer la probabilité qu'Igor réussisse exactement une figure.

Notons B l'événement « Igor réussit exactement une figure ». Dans ce cas :

$$p(B) = p(G_1 \cap \overline{G_2}) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4 = 0,42 + 0,12 = 0,54$$

4. On note G la variable aléatoire donnant les gains d'Igor.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

La probabilité qu'Igor loupe les deux figures est de  $0,3 \times 0,6 = 0,18$ , d'où :

| Gain G       | 2000 | 1    | -2000 | Total |
|--------------|------|------|-------|-------|
| $p(G = x_i)$ | 0,28 | 0,54 | 0,18  | 1     |

(b) Déterminer l'espérance de G. Igor a-t-il raison de s'inscrire au championnat du monde ?

$$E(G) = 0,28 \times 2000 + 0,54 \times 1 - 0,18 \times 2000 \approx -79$$

En moyenne Igor perd de l'argent, mais l'euro n'ayant peut-être aucune valeur en Syldavie contrairement à la gloire d'être champion du monde, il est difficile de se prononcer...

(c) Déterminer l'écart-type  $\sigma(G)$ . Interpréter.

$$V(G) = E(G^2) - (-79)^2 = 0,28 \times 2000^2 + 0,54 \times 1^2 + 0,18 \times 2000^2 - 79^2 \approx 993687$$

Et ainsi :

$$\sigma G = \sqrt{V(G)} \approx 997$$

En moyenne on devrait observer un écart de gain par rapport à la moyenne d'environ 1000 euros, c'est-à-dire qu'un tel athlète risque de gagner entre  $-79 - 997$  et  $-79 + 997$ . Le jeu pour quelqu'un qui tient à ne pas perdre son argent et très risqué, pour quelqu'un en revanche qui prêt à tout perdre en espérant gagner beaucoup le jeu est pas si mal...

5. Si Igor était Grolandais alors  $Y = 40G - 100$  est la variable aléatoire qui donne les gains qu'Igor obtiendrait du gouvernement Grolandais. Calculer  $E(Y)$  et  $\sigma(Y)$ . Interpréter.

$$E(Y) = 40E(G) - 100 \approx -40 \times 79 - 100 \approx -3278$$

Puis  $\sigma(Y) = 40 \times \sigma(G) - 100 \approx 39874$ . A cause d'une espérance faible Igor ne regrette pas d'être Syldave, cependant l'écart-type élevé pourrait pousser un Igor orgueilleux à chercher la nationalité Grolandaise.

### CORRECTION DE L'INTERROGATION N°8

*On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.*

#### Exercice 1.

(10 points)

Svetlana, une championne de roller sous marin, s'inscrit au championnat du monde de la discipline. Elle doit effectuer deux figures pour lesquelles elle est particulièrement entraînée. Par expérience elle sait qu'elle a 80% de chance de réussir sa première figure, par contre elle n'a que 20% de chance de réussir sa deuxième figure. Le gouvernement Syldave a décidé de récompenser sa championne de la manière suivante :

- Si elle réussit les deux figures, Svetlana reçoit la somme de 1000 € Syldave.
- Si elle ne réussit qu'une figure, le gouvernement syldave récompense Svetlana d'un €syldave.
- Sinon Svetlana doit au gouvernement syldave la somme de 2000 € Syldave.

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité que Svetlana réussisse les deux figures.
3. Calculer la probabilité que Svetlana réussisse exactement une figure.
4. On note  $G$  la variable aléatoire donnant les gains de Svetlana.
  - (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $G$ .
  - (b) Déterminer l'espérance de  $G$ . Svetlana a-t-elle raison de s'inscrire au championnat du monde ?
  - (c) Déterminer l'écart-type  $\sigma(G)$ . Interpréter.
5. Si Svetlana était Grolandaise alors  $Y = 40G - 100$  est la variable aléatoire qui donne les gains que Svetlana obtiendrait du gouvernement Grolandais. Calculer  $E(Y)$  et  $\sigma(Y)$ . Interpréter.

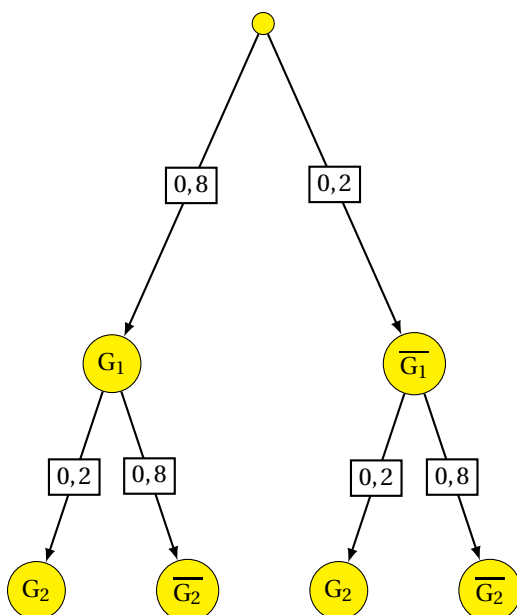
#### Exercice 2.

(10 points)

Svetlana, une championne de roller sous marin, s'inscrit au championnat du monde de la discipline. Elle doit effectuer deux figures pour lesquelles elle est particulièrement entraînée. Par expérience elle sait qu'elle a 80% de chance de réussir sa première figure, par contre elle n'a que 20% de chance de réussir sa deuxième figure. Le gouvernement Syldave a décidé de récompenser sa championne de la manière suivante :

- Si elle réussit les deux figures, Svetlana reçoit la somme de 1000 € Syldave.
- Si elle ne réussit qu'une figure, le gouvernement syldave récompense Svetlana d'un €syldave.
- Sinon Svetlana doit au gouvernement syldave la somme de 2000 € Syldave.

1. Décrire par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.  
Notons  $G_i$ , pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , l'événement Svetlana réussit sa  $i$ -ème figure.



2. Calculer la probabilité que Svetlana réussisse les deux figures.

Notons A l'événement « Svetlana réussit les deux figures ». Dans ce cas :

$$p(A) = p(G_1 \cap G_2) = 0,8 \times 0,2 = \frac{16}{100} = 0,16$$

3. Calculer la probabilité que Svetlana réussisse exactement une figure.

Notons B l'événement « Svetlana réussit exactement une figure ». Dans ce cas :

$$p(B) = p(G_1 \cap \overline{G_2}) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,8 \times 0,8 + 0,2 \times 0,2 = 0,64 + 0,04 = 0,68$$

4. On note G la variable aléatoire donnant les gains de Svetlana.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

La probabilité que Svetlana loupe les deux figures est de  $0,2 \times 0,8 = 0,16$ , d'où :

|              |      |      |       |       |
|--------------|------|------|-------|-------|
| Gain G       | 2000 | 1    | -2000 | Total |
| $p(G = x_i)$ | 0,16 | 0,68 | 0,16  | 1     |

(b) Déterminer l'espérance de G. Svetlana a-t-elle raison de s'inscrire au championnat du monde ?

$$E(G) = 0,16 \times 2000 + 0,68 \times 1 - 0,16 \times 2000 \simeq -159$$

En moyenne Svetlana perd de l'argent, mais l'euro n'ayant peut-être aucune valeur en Syldavie contrairement à la gloire d'être champion du monde, il est difficile de se prononcer...

(c) Déterminer l'écart-type  $\sigma(G)$ . Interpréter.

$$V(G) = E(G^2) - (-159)^2 = 0,16 \times 2000^2 + 0,68 \times 1^2 + 0,16 \times 2000^2 - 159^2 \simeq 774618$$

Et ainsi :

$$\sigma G = \sqrt{V(G)} \simeq 880$$

En moyenne on devrait observer un écart de gain par rapport à la moyenne d'environ 880 euros, c'est-à-dire qu'un tel athlète risque de gagner entre  $-159 - 880$  et  $-159 + 880$ . Le jeu pour quelqu'un qui tient à ne pas perdre son argent et très risqué, pour quelqu'un en revanche qui prêt à tout perdre en espérant gagner beaucoup le jeu est pas si mal...

5. Si Svetlana était Grolandaise alors  $Y = 40G - 100$  est la variable aléatoire qui donne les gains que Svetlana obtiendrait du gouvernement Grolandais. Calculer  $E(Y)$  et  $\sigma(Y)$ . Interpréter.

$$E(Y) = 40E(G) - 100 \simeq -40 \times 159 - 100 \simeq -6473$$

Puis  $\sigma(Y) = 40 \times \sigma(G) - 100 \simeq 35205$ . A cause d'une espérance faible Svetlana ne regrette pas d'être Syldave, cependant l'écart-type élevé pourrait pousser une Svetlana orgueilleuse à chercher la nationalité Grolandaise.