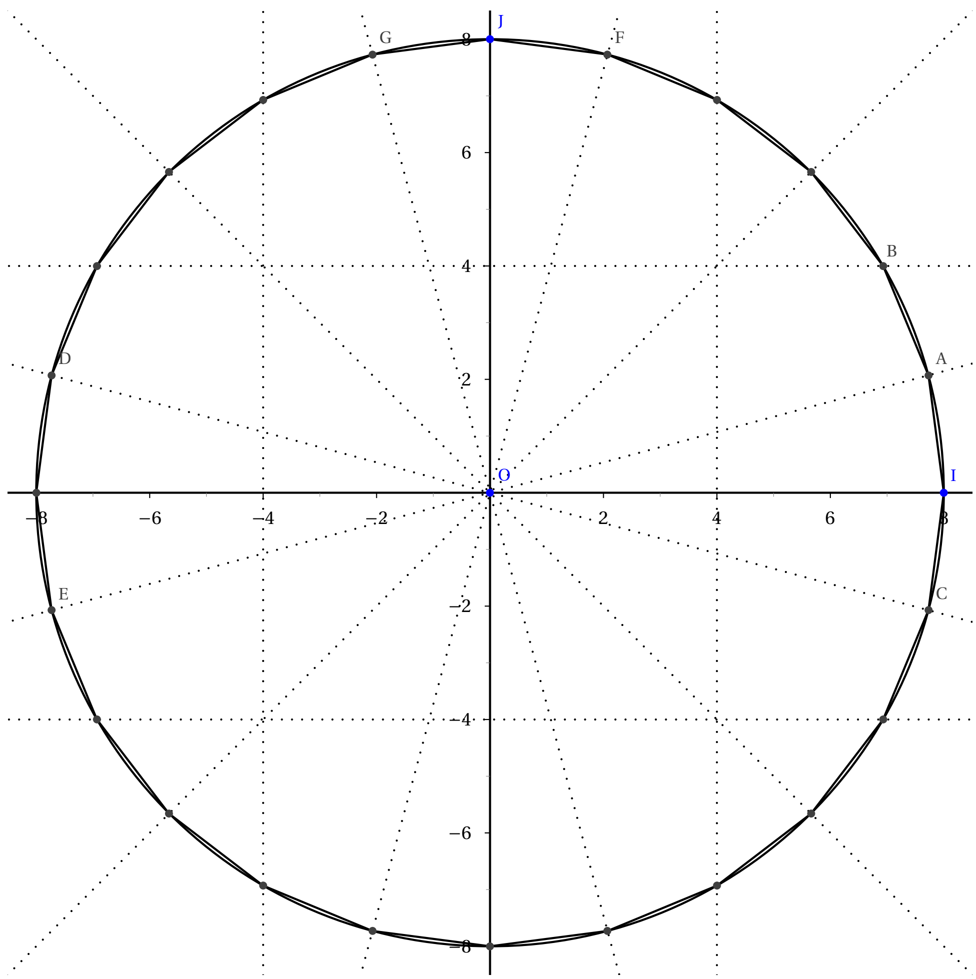
EXERCICES : TRIGONOMÉTRIE AVEC $\frac{\pi}{12}$

Exercice 1. On considère un repère orthonormal (O; I, J). 8 cm représente 1 unité graphique.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O passant par I, soiit B le point de $\mathscr{C}$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{6}$$

1. (a) Construire la figure en laissant les traits de construction apparent.
   (b) Placer le point $A\in\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{12}$
   (c) Construire le polygone régulier à 24 côtés dont A, I et J sont des sommets.
   (d) Placer les points C, D, E, F et G de $\mathscr{C}$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{12}\qquad\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)=\frac{11\pi}{12}\qquad\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OE}\right)=-\frac{11\pi}{12}\qquad\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OF}\right)=\frac{5\pi}{12}\quad\text{et}\quad\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OG}\right)=\frac{7\pi}{12}$$



2. Donner les coordonnées de B.
   Par définition du sinus et du cosinus, B a pour coordonnées :

$$\left(\cos\frac{\pi}{6};\sin\frac{\pi}{6}\right)\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

3. Calculer IB. On donnera la valeur exacte de IB puis une valeur arrondi au dixième de IB en cm.
   Notons H′ le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses. Alors le triangle BH′I est rectangle en H′.
   Des coordonnées de B on tire $H'B=\frac{1}{2}$ et $OH'=\frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus $OI=1$, et par conséquent $H'I=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc d'après le

théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{IB}^2 = \mathrm{H'I}^2 + \mathrm{H'B}^2 \\
\iff\quad & \mathrm{IB}^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\iff\quad & \mathrm{IB}^2 = 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\
\iff\quad & \mathrm{IB}^2 = 2 - \sqrt{3} \\
\iff\quad & \mathrm{IB} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \simeq 0,52
\end{aligned}$$

On vient de trouver la longueur IB en unité graphique, par conséquent $\mathrm{IB} = 8\sqrt{2-\sqrt{3}} \simeq 4,1$ cm.

4. On note H le point d'intersection entre la droite (OA) et la droite (IB). Quelle est la nature du triangle OHI ?
On observe que OB = OI = 1, ainsi le triangle OIB est isocèle en O. De plus la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. (OA) est donc aussi une hauteur dans le triangle OIB, et par conséquent :

$$(\mathrm{OA}) \perp (\mathrm{IB}) \Longrightarrow \text{le triangle OIH est rectangle en H.}$$

5. Montrer que $\mathrm{IB} = 2\sin\frac{\pi}{12}$. En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.
Dans le triangle OIH on a :

$$\sin\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}};\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \iff \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{OI}} = \mathrm{HI}$$

Or, $\mathrm{HI} = \frac{1}{2}\mathrm{IB}$ et donc, puisque $\mathrm{IB} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

6. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x + \sin x = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \\
\iff\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1 \\
\iff\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} + \frac{2-\sqrt{3}}{4} = 1 \\
\iff\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\
\iff\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{4-2+\sqrt{3}}{4} \\
\iff\quad & \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\
\iff\quad & \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}
\end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\pi}{12} > 0$, on en conclut que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

7. Donner les coordonnées des points C, D, E, F et G.
D'après les questions précédentes on sait que :

$$A\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

Dès coordonnées de A et de la symétrie de la figure on déduit celles de C, D, E, F et G :

$$C\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$D\left(\frac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$E\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$G\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$$