Exercice 1. Fonctions polynôme du second degré et nombre d'or (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

On note $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer les antécédents du réel -1.

On cherche les réels x tels que :

$$\begin{aligned}
& f(x) = -1 && (1)\\
\iff\ & x^2 - x - 1 = -1 && (2)\\
\iff\ & x^2 - x = 0 && (3)\\
\iff\ & x(x-1) = 0 && (4)\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 && (5)\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 && (6)
\end{aligned}$$

Les antécédents de -1 sont donc les deux réels 0 et 1.

(b) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction f.

Les réels 0 et 1 ont la même image -1, on en déduit que l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$

(c) En déduire la forme canonique de la fonction f.

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Ici $a = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, de plus on sait que $f(\alpha) = \beta$, par conséquent :

$$\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1-2-4}{4} = -\frac{5}{4}$$

Au final :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

(d) En déduire le tableau des variations de la fonctions f.

Le coefficient devant x^2 est positif ($a = 1$), par conséquent d'après le cours on a :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

(e) En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

Les coordonnées du sommet, appelons le S, sont d'après le cours $(\alpha;\beta)$, par conséquent :

$$S\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$$

2. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que le point $A(\varphi; 0)$ est un point de $\mathscr{P}$.

$A \in \mathscr{P}$ si et seulement si $f(\varphi) = 0$. Or,

$$f(\varphi) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

On peut donc effectivement conclure que $A \in \mathscr{P}$ puisque ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.

Exercice 2. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$.
2. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ à condition que $x^2 + 4x + 5$ soit positif ou nul.
   Or, d'après la question précédente $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$. (en effet un carré est toujours positif.)
3. Etablir que la fonction f admet un minimum à préciser.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+2)^2 \geq 0 \Longrightarrow (x+2)^2 + 1 \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1 \Longrightarrow f(x) \geq 1$.
   De plus $f(-2) = 1$. Ainsi f admet 1 pour minimum.

Correction de l'interrogation n°2

Exercice 1. Fonctions polynôme du second degré et nombre d'or (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$$

On note $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer les antécédents du réel $-\frac{1}{2}$.

On cherche les réels x tels que :

$$\begin{aligned}
& f(x) = -\frac{1}{2} && (7)\\
\iff\ & x^2 - x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} && (8)\\
\iff\ & x^2 - x = 0 && (9)\\
\iff\ & x(x-1) = 0 && (10)\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 && (11)\\
\iff\ & x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 && (12)
\end{aligned}$$

Les antécédents de $-\frac{1}{2}$ sont donc les deux réels 0 et 1.

(b) En déduire l'équation de l'axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction f.

Les réels 0 et 1 ont la même image $-\frac{1}{2}$, on en déduit que l'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$

(c) En déduire la forme canonique de la fonction f.

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Ici $a = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, de plus on sait que $f(\alpha) = \beta$, par conséquent :

$$\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$$

Au final :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

(d) En déduire le tableau des variations de la fonctions f.

Le coefficient devant x^2 est positif ($a = 1$), par conséquent d'après le cours on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

(e) En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

Les coordonnées du sommet, appelons le S, sont d'après le cours $(\alpha;\beta)$, par conséquent :

$$S\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$$

2. Montrer que le point $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ est un point de $\mathscr{P}$.

$A \in \mathscr{P}$ si et seulement si $f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Or,

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

On peut donc effectivement conclure que $A \in \mathscr{P}$ puisque ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$.

Exercice 2. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$.
2. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ à condition que $x^2 - 4x + 5$ soit positif ou nul.
   Or, d'après la question précédente $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$. (en effet un carré est toujours positif.)
3. Etablir que la fonction f admet un minimum à préciser.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0 \Longrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1 \Longrightarrow f(x) \geq 1$.
   De plus $f(2) = 1$. Ainsi f admet 1 pour minimum.