

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(7 points)

Dans un petit hameau de Syldavie, nommé Babylone, une épidémie de grippe s'est propagée et touche 30% de la population.

1. On choisit au hasard, 7 individus de cette population (on assimile le choix des 7 personnes à un tirage **avec remise**), on note X le nombre de personnes atteintes par la maladie.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale, en donner ses paramètres.

On répète 7 fois la même épreuve de Bernoulli consistant à tester si un individu ou non a attrapé la grippe. La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = 0,3$), par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = 0,3$.

- (b) Calculer la probabilité qu'aucun des 7 individus ne soient malades.

Comme $X \hookrightarrow B(7;0,3)$ on a :

$$p(X = 0) = (1 - 0,3)^7 = 0,7^7 \approx 0,08$$

Dans environ 8% des cas aucun individu choisit n'a contracté la grippe dans ce petit hameau.

- (c) Calculer $p(X = 3)$.

Comme $X \hookrightarrow B(7;0,3)$ on a

$$p(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^4 \approx 0,23$$

Dans environ 23% des cas exactement 3 individus ont contracté la grippe.

- (d) Calculer $E(X)$. Interpréter.

Comme $X \hookrightarrow B(7;0,3)$ on a :

$$E(X) = np = 7 \times 0,3 = 2,1$$

En moyenne on sur les 7 individus 2 environ auront contracté la maladie.

2. Aphex Twin¹ est un syldave de ce petit hameau. On sait désormais qu'il était atteint de la grippe, puisqu'il en a souffert de longues années durant. Malheureusement pour lui, les médecins syldave détectent la maladie dans un cas sur cinq et dans tous les autres cas ils déclarent sains le patient pourtant malade.

Aphex Twin, connaissant son pays, décide de consulter 4 médecins Syldave.

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de médecin qui se sont rendus compte de la maladie d'Aphex Twin.

- (a) Déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y ; en donner ses paramètres.

On répète 4 fois la même épreuve de Bernoulli consistant pour Aphex à demander au médecin s'il est malade ou non. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = \frac{1}{5}$), par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0,2$.

- (b) Calculer $E(Y)$, interpréter.

Comme $Y \hookrightarrow B(4;0,2)$ on a :

$$E(Y) = np = 4 \times 0,2 = 0,8$$

En moyenne on sur les 4 médecins consultés un tout petit moins d'un constatera qu'Aphex est grippé.

- (c) Aphex Twin décide de se faire soigner dès lors qu'au moins un des quatre médecin le déclare malade. Calculer la probabilité qu'Aphex Twin ait été soigné. Cette probabilité vaut :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,8^4 = 0,5904$$

Dans environ 60% des cas la maladie d'Aphex Twin sera détectée par au moins un des 4 médecins.

Exercice 2.

(3 points)

Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, quatre réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte. La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).

1. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses du candidat Fabrice. Calculer $p(X \geq 1)$.

On répète 10 fois la même épreuve de Bernoulli consistant à trouver au hasard ou pas la bonne réponse à une question du QCM. La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = 0,25$), par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,25$. On en déduit que :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,75^{10} \approx 0,94$$

Il y a donc environ 94% de chances que Fabrice réponde correctement à au moins une question.

1. Aphex Twin est un compositeur britannique de musique électronique

2. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le numéro de la première question à laquelle Fabrice répond juste. On convient que Y prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses.

Compléter le tableau suivant (on explicitera au moins un calcul) : Si $Y = 3$, cela signifie que Fabrice a répondu faux aux deux premières questions et correctement à la troisième question (attention ici Y ne suit pas une loi binomiale), on a donc :

$$p(Y = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
$p(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{81}{1024}$	$\frac{243}{4096}$	$\frac{729}{16384}$	$\frac{2187}{65536}$	$\frac{6561}{262144}$	$\frac{19683}{1048576}$	$\frac{59049}{1048576}$	1

3. Calculer $E(Y)$. Interpréter.

$$E(Y) = \frac{1}{4} \times 1 + \dots + 11 \times \frac{59049}{1048576} = \alpha$$

En moyenne Fabrice réponds correctement pour la première fois aux environs de la question α . (se méfier de la valeur $X = 11$ qui fausse éventuellement le calcul de la moyenne...)

Exercice 3.

Poker - Enigme



Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ? Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(7 points)

Dans un petit hameau de Syldavie, nommé Babylone, une épidémie de peste s'est propagée et touche 20% de la population.

1. On choisit au hasard, 9 individus de cette population (on assimile le choix des 9 personnes à un tirage **avec remise**), on note X le nombre de personnes atteintes par la maladie.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale, en donner ses paramètres.

On répète 9 fois la même épreuve de Bernoulli consistant à tester si un individu ou non a attrapé la peste. La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = 0,2$), par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre $n = 9$ et $p = 0,2$.

- (b) Calculer la probabilité qu'aucun des 9 individus ne soient malades.

Comme $X \hookrightarrow B(9; 0,2)$ on a :

$$p(X = 0) = (1 - 0,2)^9 = 0,8^9 \approx 0,13$$

Dans environ 13% des cas aucun individu choisit n'a contracté la grippe dans ce petit hameau.

- (c) Calculer $p(X = 3)$.

Comme $X \hookrightarrow B(9; 0,2)$ on a

$$p(X = 3) = \binom{9}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^6 \approx 0,18$$

Dans environ 18% des cas exactement 3 individus ont contracté la grippe.

- (d) Calculer $E(X)$. Interpréter.

Comme $X \hookrightarrow B(9; 0,2)$ on a :

$$E(X) = np = 9 \times 0,2 = 1,8$$

En moyenne on sur les 9 individus 2 environ auront contracté la maladie.

2. Gonjasufi² est un syldave de ce petit hameau. On sait désormais qu'il était atteint de la peste, puisqu'il en a souffert de longues années durant. Malheureusement pour lui, les médecins syldave détectent la maladie dans un cas sur trois et dans tous les autres cas ils déclarent sains le patient pourtant malade.

Gonjasufi, connaissant son pays, décide de consulter 4 médecins Syldave.

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de médecin qui se sont rendus compte de la maladie de Gonjasufi.

- (a) Déterminer la loi que suit la variable aléatoire Y ; en donner ses paramètres.

On répète 4 fois la même épreuve de Bernoulli consistant pour Gonjasufi à demander au médecin s'il est malade ou non. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = \frac{1}{3}$), par conséquent Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

- (b) Calculer $E(Y)$, interpréter.

Comme $Y \hookrightarrow B\left(4; \frac{1}{3}\right)$ on a :

$$E(Y) = np = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

En moyenne on sur les 4 médecins consultés un tout petit plus d'un constatera que gonjasufi a la peste.

- (c) Gonjasufi décide de se faire soigner dès lors qu'au moins un des quatre médecin le déclare malade. Calculer la probabilité que Gonjasufi ait été soigné. Cette probabilité vaut :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}$$

Dans environ 65 cas sur 81 la maladie de Gonjasufi sera détectée par au moins un des 4 médecins.

Exercice 2.

(3 points)

Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, trois réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte. La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).

2. Gonjasufi est un artiste américain, composant une musique proche du hip hop, elle se révèle cependant vite marquée par d'autres influences très variées, comme le rock, le folk ou encore la soul.

1. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses du candidat Fabrice. Calculer $p(X \geq 1)$.

On répète 10 fois la même épreuve de Bernoulli consistant à trouver au hasard ou pas la bonne réponse à une question du QCM. La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli (avec pour probabilité de succès $p = \frac{1}{3}$), par conséquent X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$. On en déduit que :

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,98$$

Il y a donc environ 98% de chances que Fabrice réponde correctement à au moins une question.

2. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le numéro de la première question à laquelle Fabrice répond juste. On convient que Y prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses.

Compléter le tableau suivant (on explicitera au moins un calcul) : Si $Y = 3$, cela signifie que Fabrice a répondu faux aux deux premières questions et correctement à la troisième question (attention ici Y ne suit pas une loi binomiale), on a donc :

$$p(Y = 3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
$p(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{3^5}$	$\frac{32}{3^6}$	$\frac{64}{3^7}$	$\frac{128}{3^8}$	$\frac{256}{3^9}$	$\frac{512}{3^{10}}$	$\frac{2^{10}}{3^{10}}$	1

3. Calculer $E(Y)$. Interpréter.

$$E(Y) = \frac{1}{3} \times 1 + \dots + 11 \times \frac{2^{10}}{3^{10}} = \alpha$$

En moyenne Fabrice réponds correctement pour la première fois aux environs de la question α . (se méfier de la valeur $X = 11$ qui fausse éventuellement le calcul de la moyenne...)

Exercice 3.

Poker - Enigme



Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la 7ème rue et de la 33ème avenue. La caserne se trouve à l'angle de la 15ème rue et de la 40ème avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ?