

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1.

(10 points)

Bachar Mar-Khalifé¹, jeune star montante du club de basketball du Wall of Garden de Gattaca situé dans la capitale Syldave, a constaté qu'il a une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ de réaliser un panier à trois points. Qu'il neige, qu'il vente ou qu'il pleuve, bref quelque soit les conditions cette probabilité est la même. Dans le derby qui oppose les deux clubs de la capitale Bachar Mar-Khalifé sait qu'il va tenter 10 paniers à trois points.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de paniers à trois points que va marquer Bachar Mar-Khalifé dans ce derby.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X , on précisera ces paramètres.

On repère 10 fois la même épreuve de Bernoulli. Pour chaque épreuve un succès est de réussir le panier à trois points, Bachar Mar-Khalifé a 2 chances sur 3 d'y parvenir. X compte le nombre de panier à trois points que va réussir Bachar Mar-Khalifé, par conséquent :

$$X \hookrightarrow B\left(10; \frac{2}{3}\right)$$

2. Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 10)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow B\left(10; \frac{2}{3}\right)$, on a :

$$p(X = 0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \quad \text{et} \quad p(X = 10) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{2^{10}}{3^{10}}$$

Les chances de Bachar Mar-Khalifé de ne rien réussir, comme de tout réussir, sont très faibles.

3. Calculer la probabilité que Bachar Mar-Khalifé marque au moins 9 paniers à trois points dans ce derby.

On cherche $p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$, par conséquent :

$$p(X \geq 9) = \binom{10}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 \times \frac{1}{3} + \frac{2^{10}}{3^{10}} = \frac{10 \times 2^9 + 2^{10}}{3^{10}}$$

4. Calculer la probabilité que Bachar Mar-Khalifé marque au moins 1 panier à trois points dans ce derby.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \frac{1}{3^{10}}$$

5. Calculer $E(X)$. Interpréter. Comme $X \hookrightarrow B\left(10; \frac{2}{3}\right)$ on a :

$$E(X) = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,7$$

On s'attend à ce que dans ce derby Bachar Mar-Khalifé marque autour de 6 ou 7 paniers à trois points.

6. Déterminer le nombre n de tentative de paniers à trois points que doit effectuer Bachar Mar-Khalifé pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un.

On cherche n tel que

$$p(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - \frac{1}{3^n} \geq 0,99 \iff \frac{1}{3^n} \leq 0,01$$

On procède par tâtonnement (à l'aide de la calculatrice), cette inéquation n'est pas vérifiée pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ mais par contre dès que $n \geq 5$ on a $\frac{1}{3^n} \leq 0,01$. Autrement dit Bachar Mar-Khalifé doit au moins tenter 5 tirs à trois points pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un.

1. En 2013 cet artiste libanais vient de sortir un disque s'intitulant Who's Gonna Get The Ball From Behind the Wall of the Garden Today, pour l'anecdote cet album contient 10 titres

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 2.

(10 points)

Woodkid², jeune star montante du club de basketball du Golden Age Gattaca situé dans la capitale Syldave, a constaté qu'il a une probabilité égale à $\frac{3}{5}$ de réaliser un panier à trois points. Qu'il neige, qu'il vente ou qu'il pleuve, bref quelque soit les conditions cette probabilité est la même. Dans le derby qui oppose les deux clubs de la capitale Woodkid sait qu'il va tenter 14 paniers à trois points.

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de paniers à trois points que va marquer Woodkid dans ce derby.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X , on précisera ces paramètres.

On repère 14 fois la même épreuve de Bernoulli. Pour chaque épreuve un succès est de réussir le panier à trois points, Woodkid a 3 chances sur 5 d'y parvenir. X compte le nombre de panier à trois points que va réussir Woodkid, par conséquent :

$$X \hookrightarrow B\left(14; \frac{3}{5}\right)$$

2. Calculer $p(X=0)$ et $p(X=14)$. Interpréter.

Puisque $X \hookrightarrow B\left(14; \frac{3}{5}\right)$, on a :

$$p(X=0) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{14} = \frac{2^{14}}{5^{14}} \quad \text{et} \quad p(X=14) = \left(\frac{3}{5}\right)^{14} = \frac{3^{14}}{5^{14}}$$

Les chances de Woodkid de ne rien réussir, comme de tout réussir, sont très faibles.

3. Calculer la probabilité que Woodkid marque au moins 13 paniers à trois points dans ce derby.

On cherche $p(X \geq 13) = p(X=13) + p(X=14)$, par conséquent :

$$p(X \geq 13) = \binom{14}{13} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{13} \times \frac{2}{5} + \frac{3^{14}}{5^{14}} = \frac{14 \times 3^{13} + 3^{14}}{5^{14}}$$

4. Calculer la probabilité que Woodkid marque au moins 1 panier à trois points dans ce derby.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \frac{2^{14}}{5^{14}}$$

5. Calculer $E(X)$. Interpréter. Comme $X \hookrightarrow B\left(14; \frac{3}{5}\right)$ on a :

$$E(X) = 14 \times \frac{3}{5} = \frac{42}{5} = 8,4$$

On s'attend à ce que dans ce derby Woodkid marque autour de 8 ou 9 paniers à trois points.

6. Déterminer le nombre n de tentative de paniers à trois points que doit effectuer Woodkid pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un.

On cherche n tel que

$$p(X \geq 1) \geq 0,99 \iff 1 - \frac{2^n}{5^n} \geq 0,99 \iff \frac{2^n}{5^n} \leq 0,01$$

On procède par tâtonnement (à l'aide de la calculatrice), cette inéquation n'est pas vérifiée pour $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$ mais par contre dès que $n \geq 6$ on a $\frac{2^n}{5^n} \leq 0,01$. Autrement dit Woodkid doit au moins tenter 6 tirs à trois points pour être sûr à plus de 99% d'en marquer au moins un.

2. En 2013 cet artiste français vient de sortir un disque s'intitulant The Golden Age, pour l'anecdote cet album contient 14 titres.