

RÉVISIONS ALGO ET SUITES

I) Liban mai 2013 (spécialité)

(5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables : a, b et c sont des nombres réels
 i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

Initialisation : a prend la valeur 3
 b prend la valeur 8

Traitement : Saisir n
 Pour i variant de 2 à n faire
 | c prend la valeur a
 | a prend la valeur b
 | b prend la valeur ...
 Fin Pour

Sortie : Afficher b

- a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

- b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer QP .

On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

II) Amérique du Nord mai 2013 (spécialité)**(5 points)****Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel b est un entier naturel c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$ Affecter à c la valeur $c + 1$ Affecter à a la valeur $a - b$ Fin de tant que
Sortie :	Afficher c Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p .

Étape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p , calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
2. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}.$$

3. Décoder alors la lettre B.

III) Antilles-Guyane (spécialité) juin 2012

(5 points)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

- b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}.$$

- b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

4.

5. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ 
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$  alors Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?