RÉVISIONS
ALGO ET SUITES

I) Pondichéry avril 2013 (6 points)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

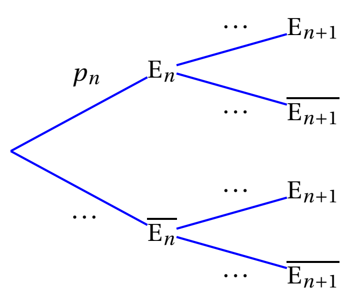
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $\mathrm{P} < 0,05 - 10^{-\mathrm{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times \mathrm{P} + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

II) Liban mai 2013 (5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
v est un réel	v est un réel	v est un réel
i et n sont des entiers naturels	i et n sont des entiers naturels	i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme :	**Début de l'algorithme :**	**Début de l'algorithme :**
Lire n	Lire n	Lire n
v prend la valeur 1	Pour i variant de 1 à n faire	v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire	v prend la valeur 1	Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$	Afficher v	Afficher v
Fin pour	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Afficher v	Fin pour	Fin pour
		Afficher v
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

III) Amérique du Nord mai 2013 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

IV) Polynésie juin 2012 (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $\text{N}-1$
Affecter à U la valeur $3\text{U}-2k+3$
Fin pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $\text{N}=3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   b. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
   b. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
   c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.
   d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

V) Asie juin 2012 (5 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul $b\,(b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < \mathrm{N}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4, b = 9 et \mathrm{N} = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

VI) Centres étrangers juin 2012 (5 points)

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathrm{I}_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n.$$

d. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) ontient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la valeur de ℓ.

VII) Antilles-Guyane juin 2012 (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

   On choisit, au hasard, un élève du lycée.

   Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.

   Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.

3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.

   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

   On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

   On suppose que les évènements A et F sont indépendants.

   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.

   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

   Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

   Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.