

## DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT 8 : LES COMPLEXES

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe  $i$ , B d'affixe  $-2i$  et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct, ie tel que  $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3}$ .

Soit  $f$  l'application qui à tout point M d'affixe  $z$ , différent de  $i$ , associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + i)$ .
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application  $f$ .
3.
  - a. Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $i$ , on a  $(z' + 2i)(z - i) = 1$ .
  - b. En déduire que pour tout point M d'affixe  $z (z \neq i)$  :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4.
  - a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$ .
  - b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application  $f$ . On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD'E' ?