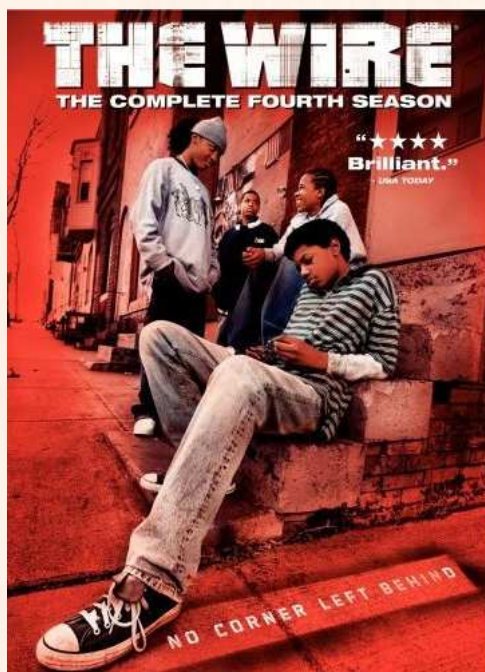


CHAPITRE 1

DIVERS RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES



HORS SUJET



TITRE : « The Wire »

AUTEUR : DAVID SIMON

PRÉSENTATION SUCCINCTE DE L'AUTEUR : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de \LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr/nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

I) Des symboles à connaître	1
I.1. Implication \Rightarrow , réciproque \Leftarrow et équivalence \Leftrightarrow	1
I.2. Les quantificateurs pour tout \forall et il existe \exists	2
II) Des raisonnements déjà connus	3
II.1. Le contre-exemple	3
II.2. La disjonction de cas	4
II.3. L'absurde et la contraposé	5
III)Un nouveau raisonnement : La récurrence	7

L'ESSENTIEL :

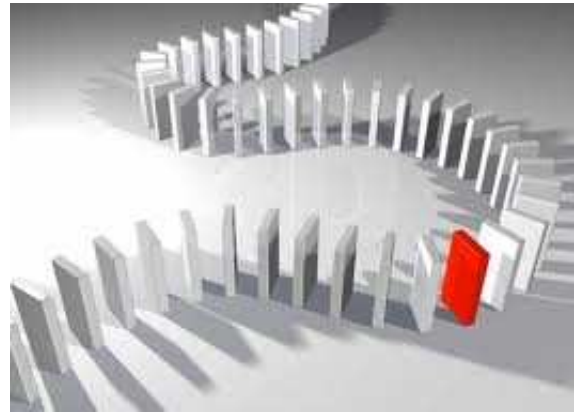
- ↪ Maîtriser les symboles mathématiques de la démonstration
- ↪ Avoir conscience de différents types de raisonnements logiques
- ↪ Traduire et comprendre les quantificateurs
- ↪ Comprendre le principe du raisonnement par récurrence
- ↪ Rédiger une démonstration par récurrence

« Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous »

THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

DIVERS RAISONNEMENTS

MATHÉMATIQUES



Introduction

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur divers types de raisonnements logiques utilisés en mathématiques, permettant d'établir des démonstrations.

Lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est toujours vraie ou au contraire fausse, on peut commencer par regarder des cas particuliers. Cependant, ceci ne prouve pas qu'une proposition est vraie tout le temps.

Il s'avère donc nécessaire de mettre en place des raisonnements logiques pour arriver à une conclusion valide. Il en existe plusieurs types, dont les principaux sont exposés ici.

A votre niveau, on ne vous demandera pas de savoir faire des démonstrations de cours, mais on peut vous demander de savoir les reproduire. Pour cela, la meilleure manière est de les comprendre, notamment dans leur démarche, et donc dans le type de raisonnement invoqué. De plus, vous constaterez que ces raisonnements sont valables pour résoudre des problèmes et des exercices de votre niveau. Vous avez déjà rencontré la plupart d'entre eux, mais vous allez également découvrir ici le raisonnement par récurrence, fondamental en classe de Terminale Scientifique.

I) Des symboles à connaître

I.1. Implication \implies , réciproque \impliedby et équivalence \iff

Définition 1.

Le symbole \implies signifie « **implique** ». On peut également traduire une propriété contenant ce symbole sous la forme « Si ... Alors ».

L'**implication** est le principe même du raisonnement mathématique : dans une propriété, une hypothèse entraîne une conclusion.

On dit que l'hypothèse est une de **condition suffisante** pour conclure, et que la conclusion est une **condition nécessaire** pour avoir l'hypothèse.

Exemples :

Considérons les propositions vraies suivantes :

\rightsquigarrow Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.

S'appeler Ana est une condition suffisante pour conclure que je suis une fille.

\rightsquigarrow Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme. *Qu'un quadrilatère soit un rectangle est une condition suffisante pour conclure qu'il s'agit d'un parallélogramme.*

$\rightsquigarrow x \geq 10 \implies 3x \geq 15.$

**Définition 2.**

La **réciproque** d'une propriété consiste à retourner la phrase en échangeant l'hypothèse et la conclusion, ou encore à changer le sens de la flèche.

Une propriété et sa réciproque sont indépendantes et se démontrent séparément.

En effet le fait qu'une propriété soit vraie n'implique pas que sa réciproque le soit !

**Exemples :**

Considérons les réciproques des propositions de l'exemple précédent.

↪ Si je suis une fille, alors je m'appelle Ana : FAUX

Pour m'appeler Ana, il n'est pas suffisant d'être une fille.

↪ Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un rectangle : FAUX

Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il n'est pas suffisant qu'il soit un parallélogramme.

↪ $x \geq 10 \iff 3x \geq 15$: FAUX

**Définition 3.**

Lorsqu'une propriété et sa réciproque sont vraies, on utilise le symbole \iff , qui signifie « **équivalent à** ».

On peut également traduire ce symbole par « **Si et seulement si** ».

On parle d'**équivalence** entre l'hypothèse et la conclusion.

**Exemples :**

↪ ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$

↪ $x \geq 5 \iff 3x \geq 15$

I.2. Les quantificateurs pour tout \forall et il existe \exists **Définition 4.**

Les **quantificateurs**. Ils précisent le domaine de validité d'une propriété.

Au lycée, vous devez connaître les symboles \forall et \exists , qui signifient respectivement « **Pour tout** » et « **Il existe un** », sous entendu « (au moins) ». La virgule qui suivra le symbole \exists sera alors traduite par « tel que ».

Il est donc essentiel de bien les comprendre pour savoir dans quels cas une propriété peut s'appliquer.

**Exemples :**

↪ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

↪ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 100$

**Attention !**

Lorsqu'on énonce des propositions toujours vraies en français, on sous-entend souvent les quantificateurs.

 **Exemples :**

- ↪ Noël est en décembre (sous entendu « **Tous** les ans »)
- ↪ Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle (sous-entendu « **Tous** les parallélogrammes »)
- ↪ Un parallélogramme peut avoir des diagonales de même longueur (sous-entendu « **il existe** (au moins) un tel parallélogramme »)

 **Attention !**

Les deux quantificateurs « **tout** » et « **il existe** » sont liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition. En effet, le contraire de « tout » n'est pas « aucun », mais « il existe (au moins) un ».


 **Exemples :**

Le contraire de « **Tous** les ans, Noël est en décembre » est la proposition « **Il existe une** année (au moins) ou Noël n'est pas en décembre ».

Le contraire de « **Tous** les rectangle sont des parallélogrammes » est la proposition « **Il existe un** rectangle (au moins) qui n'est pas un parallélogramme ».

Evidemment une proposition et son contraire ne peuvent pas être toutes les deux vraies.

Pour énoncer le contraire de ces propositions, on a dit qu'il existait au moins un cas où l'hypothèse émise était vérifiée, mais pas la conclusion.

 **Exercice 1** : On définit sur \mathbb{N}^* la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

On considère la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n < \varepsilon$$

1. Traduire cette phrase mathématique en français.
2. On choisit $\varepsilon = 1$.
 - a. Trouver un rang p telle que $u_p < \varepsilon$.
 - b. Montrer que pour tout $n \geq p$ on a $u_n < \varepsilon$
 - c. Conclure par rapport à la proposition donnée dans ce cas particulier.
3. Même question pour $\varepsilon = 0.1, 0.01$ et 10^{-6} .
4. Peut-on conclure que la proposition est vraie ?
5. Démontrer cette proposition dans le cas général (ie pour ε quelconque).

II) Des raisonnements déjà connus

II.1. Le contre-exemple

Travail de l'élève 1.

1. Démontrer que les propositions suivantes sont fausses :
 - a. « Aujourd'hui tout est fabriqué en Chine »
 - b. « Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle »
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 11$ est premier » ie qu'il admet exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

- La proposition $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ?
- Faire un tableau de valeurs à la calculatrice de l'expression $n^2 - n + 11$ pour n allant de 1 à 10. Que dire de $\mathcal{P}(2)$? $\mathcal{P}(3)$? $\mathcal{P}(4)$? $\mathcal{P}(10)$?
- La proposition $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier naturel n ?

**Définition 5.**

Le **contre-exemple** s'utilise pour montrer qu'il existe au moins un cas où une proposition n'est pas vraie, donc qu'elle est fausse.

**Exemple :**

Montrer par un contre-exemple que la proposition $\mathcal{P}(n)$: « L'entier $n^2 - n + 41$ est premier » n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Solution :**

Si on choisit $n = 41$, alors $n^2 - n + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui admet pour diviseurs 1, 41 et 41^2 . Ce n'est donc pas un nombre premier.

On peut vérifier que pour tout $0 \leq n < 41$ on a $n^2 - n + 41$ qui est premier. Mais ce n'est pas parce qu'une proposition est vraie sur les 41 premiers entiers naturels qu'elle l'est pour tous ...

II.2. La disjonction de cas**Définition 6.**

On parle de raisonnement par **disjonction de cas** pour démontrer qu'une proposition est vraie, lorsque la démonstration effectuée dépend de la situation, mais que l'on traite tous les cas possibles séparément.

Au préalable, on commence par un tri, pour restreindre le nombre de cas à étudier.

**Exemples :**

- ↪ Aux échecs, le joueur qui a gagné annonce « Echec et Mat » avant que son adversaire joue, car il a envisagé tous les déplacements adverses possibles et qu'aucun ne l'empêche de gagner.
- ↪ Montrer par disjonction de cas que pour tout entier naturel n , le produit $n(n + 1)$ est divisible par 2.

**Solution :**

Considérons les seuls deux cas possibles : n est soit pair, soit impair.

↪ Si n est pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et donc $n(n + 1) = 2k \times (2k + 1)$ ce qui est un divisible par 2.

↪ Si n est impair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$ et donc $n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = (2k + 1)(2k + 2) = 2(2k + 1)(k + 1)$ ce qui est divisible par 2.

Donc dans tous les cas, $n(n + 1)$ est divisible par 2. La proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3. L'absurde et la contraposé

**Définition 7.**

Le raisonnement par l'**absurde** est une forme de raisonnement logique, consistant à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité du contraire.

En effet, une proposition est forcément vraie ou fausse, mais jamais les deux à la fois.

**Exemple :**

1. Montrer par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\implies n$ impair.
2. Montrer que la réciproque de cette proposition est vraie aussi $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Traduire ces deux propriétés en une seule.

**Solution :**

1. Raisonnons par l'absurde : Supposons que la proposition n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ie qu'il existe (au moins) un cas où n^2 est impair et n pair et plaçons-nous dans ce cas.
Comme n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et par conséquent on a $n^2 = 4k^2$. Donc n^2 est pair, ce qui est absurde. Ce cas ne peut pas exister : la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La réciproque à montrer est « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n impair $\implies n^2$ impair ». Supposons que n est un entier quelconque impair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Par conséquent, $n^2 = 4k^2 + 2k + 1 = 2(2k + 1) + 1$ qui est un nombre impair. Donc la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\iff n$ impair.

**En pratique : mécanisme du raisonnement par l'absurde**

Pour montrer qu'une proposition A entraîne une proposition B :

- \rightsquigarrow On suppose A vraie et la négation de B
- \rightsquigarrow On montre que cela entraîne contradiction (avec l'hypothèse de A en général)
- \rightsquigarrow On en déduit que l'on a forcément $A \implies B$


**Définition 8.**

Soit \mathcal{P} la proposition suivante :

« Si A est vraie alors B est vraie » notée $A \implies B$

La **contraposée** de \mathcal{P} est la proposition :

« Si B n'est pas vraie alors A n'est pas vraie » notée $(\text{Non } B) \implies (\text{Non } A)$.

 **Propriété 1.** (Définition)

Si une proposition \mathcal{P} est vraie, alors sa contraposée aussi (et réciproquement).

$$\mathcal{P} \quad \text{équivaut à} \quad \text{Contraposée de } \mathcal{P}$$

$$A \implies B \quad \text{si et seulement si} \quad (\text{Non } B) \implies (\text{Non } A)$$

On dit que la conclusion B est une **condition nécessaire** à l'hypothèse A.

Dans le cas où $A \iff B$, on dit que A est une **condition nécessaire et suffisante** à B (et réciproquement).

 **Preuve**

Notons \mathcal{P}' la contraposée de \mathcal{P} . On veut démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \iff \mathcal{P}'$, donc l'implication et sa réciproque.

$\mathcal{P} \implies \mathcal{P}'$ Raisonons par l'absurde :

Supposons \mathcal{P} vraie, mais \mathcal{P}' fausse, à savoir que $(\text{Non } B) \neq (\text{Non } A)$, ou encore qu'il existe au moins un cas où B est faux, mais A est vrai. Plaçons nous dans ce cas.

Comme A est vrai, d'après \mathcal{P} on a aussi B vrai, ce qui est absurde puisque l'on a supposé B faux. Donc A est forcément faux.

Ainsi, si une proposition est vraie, alors sa contraposée est vraie aussi.

$\mathcal{P}' \implies \mathcal{P}$ D'après ce qui précède, en supposant \mathcal{P}' vraie, on sait que sa contraposée l'est aussi.

Or la contraposée de \mathcal{P}' est $(\text{Non } (\text{Non } A)) \implies (\text{Non } (\text{Non } B))$, ie $A \implies B$ ou encore \mathcal{P} .

Donc $\mathcal{P}' \implies \mathcal{P}$.

CQFD

 **Exemples :**

↪ Si je m'appelle Ana, alors je suis une fille.

Contraposée (vraie) : Si je ne suis pas une fille, alors je ne m'appelle pas Ana.

Il est nécessaire d'être une fille pour s'appeler Ana (mais cela n'est pas suffisant).

↪ Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.

Contraposée (vraie) : Si un quadrilatère n'est pas un parallélogramme, alors ce n'est pas un rectangle.

Il est nécessaire qu'un quadrilatère soit un parallélogramme pour être un rectangle (mais cela n'est pas suffisant).

↪ $x \geq 10 \implies 3x \geq 15$.

Contraposée (vraie) : $3x < 15 \implies x < 10$

↪ Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Contraposée (vraie) : Si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A.

Remarque : Une proposition ou de sa contraposée sont donc équivalentes. Dans un cours, on pourrait donc écrire l'une ou l'autre sans perte d'information.


En général, le choix de formulation ne se fait pas en fonction de celle que l'on démontre le plus facilement, mais en fonction de celle que l'on emploie le plus aisément, ou tout simplement celle qu'on a l'habitude de rencontrer dans les divers ouvrages : il ne faut pas oublier ce que l'on a reçu en héritage, provenant de divers horizons, et il est tout à fait normal de continuer à formuler certaines propriétés comme elles l'ont toujours été, tout en sachant que dès que l'on en aura besoin, on pourra passer de l'une à l'autre sans problème.

 **Exemple :**

Énoncer alors les contraposées (vraies) des propriétés établies dans l'exemple précédent.

**Solution :**

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair.}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair.}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \Leftrightarrow n^2 \text{ pair.}$

 **Exercice 2 :** On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair.}$

Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme d'un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

III) Un nouveau raisonnement : La récurrence

**Problème d'introduction**

On dispose d'une infinité de dominos, placés « debouts » les uns à la suite des autres et on numérote leur position dans l'ordre.

On cherche les éventuelles conditions pour être sûr de les faire tous tomber à la chaîne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété (dépendant de n)

$\mathcal{P}(n) : \ll \text{le } n^{\text{ième}} \text{ domino tombe.} \gg$

1. A quelle(s) condition(s) $\mathcal{P}(1)$ est-elle vraie ?
2. Même question pour $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$, $\mathcal{P}(4)$, puis $\mathcal{P}(10)$ et enfin $\mathcal{P}(65\,468)$.
3. A quelle(s) condition(s) $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Travail de l'élève 2. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Chaque terme de cette suite se calcule à partir du précédent. On dit que cette suite est définie **par récurrence**.

But : On souhaiterait pouvoir calculer n'importe quel terme sans avoir à calculer chacun des précédents, ie conjecturer une formule **explicite** de u_n en fonction de n et la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quel type de suites définies par récurrence connaissez-vous des formules explicites ?
La suite (u_n) est-elle de l'un de ces types ? *Justifier*
2. Calculer à la main les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 .
3. Etablir à la calculatrice le tableau de valeurs de (u_n) et vérifier vos résultats.
4. La plupart des calculatrices n'affichent pas dans leur tableau une valeur exacte à partir de u_{20} .
Grâce aux premières lignes de ce tableau, conjecturer la valeur exacte de u_{33} et u_{34} .
5. Ces résultats sont-ils certains ? Que faudrait-il faire pour les vérifier ?

6. Quelqu'un a eu le courage de se lancer dans cette vérification et a trouvé $u_{33} = 8589934591$, mais pour u_{34} , sa calculatrice ne donne qu'une valeur approchée.
Vérifier à la calculatrice votre conjecture pour u_{33} , puis, sans calculatrice, vérifier votre conjecture sur u_{34} .
7. Conjecturer une formule explicite pour calculer u_n . Ce résultat est-il certain pour tout $n \in \mathbb{N}$?
8. Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $\mathcal{P}(n) : \ll u_n = \dots \gg$
Mettre en place un raisonnement analogue à celui des dominos pour démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 **Conclusion**

Vous venez de faire un **raisonnement par récurrence**. De telles démonstrations servent à prouver qu'une proposition est vraie ou fausse pour tout entier à partir d'un certain rang. Il faut donc avoir à démontrer quelque chose du genre :
« Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie »

*Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété **supposée** résultant d'un certain nombre d'observations.*

 **Principe et rédaction du raisonnement par récurrence**

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et n_0 un entier naturel fixé. Pour démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes.

↪ **Initialisation de la propriété**

On vérifie que la proposition est vraie pour l'entier n_0

Lorsqu'il s'agit d'une égalité à vérifier, on calcule séparément les deux membres de l'égalité, puis on les compare

↪ **Hérédité**

– On suppose qu'il existe (au moins) un entier $k \geq n_0$ tel que la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence).

– Eventuellement on énonce $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ (conseillé)

– On démontre que $\mathcal{P}(k)$ vraie entraîne $\mathcal{P}(k+1)$ vraie aussi.

Lorsqu'il s'agit d'une égalité à démontrer, on part d'un membre, on transforme son écriture grâce à l'hypothèse de récurrence (on précise l'endroit où on l'utilise) et on retrouve l'autre membre.

↪ **Conclusion**

On peut alors conclure que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

 **Preuve (de la conclusion)**

Supposons qu'il existe au moins un n pour lequel $\mathcal{P}(n)$ n'est pas vraie, et appelons n_1 le plus petit d'entre eux. Comme n_1 est le plus petit d'entre eux (et que ce n'est pas n_0 car on a déjà vérifié l'initialisation) on sait que pour tout $n_0 \leq i < n_1$, $\mathcal{P}(i)$ est vraie. En particulier $\mathcal{P}(n_1 - 1)$ est vraie.

Mais d'après le caractère héréditaire de la proposition, on sait que cela entraîne $\mathcal{P}(n_1)$ vraie aussi. Ce qui est absurde ...

 **Exemple :**

Compléter la démonstration par récurrence suivante, afin de montrer que la somme des n premiers entiers non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition «

↪ **Initialisation** : pour $n =$

La somme des n premiers entiers non nuls vaut

Et $\frac{n(n+1)}{2} =$

Donc $\mathcal{P}(\dots)$ est vraie.

↪ **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier $k \geq \dots$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a

On cherche à montrer $\mathcal{P}(k+1)$: «

Or $1+2+3+\dots+\dots+(k+1) =$

$=$

$=$

Donc $\mathcal{P}(\dots\dots)$ est vraie. La proposition est

↪ **Conclusion** La proposition est et

Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

 **Exemple :**

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$.

 **Solution :**

On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n \leq 3$ »

↪ **Initialisation** : pour $n = 0$

$u_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 \leq 3$

Donc $0 \leq u_0 \leq 3$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

↪ **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, ie tel que l'on a $0 \leq u_k \leq 3$

On cherche à montrer $\mathcal{P}(k+1)$: « $0 \leq u_{k+1} \leq 3$ » ou encore $0 \leq \sqrt{u_k + 6} \leq 3$

Or $0 \leq u_k \leq 3 \iff 6 \leq u_k + 6 \leq 9$

$\iff \sqrt{6} \leq \sqrt{u_k + 6} \leq \sqrt{9}$ car la fonction racine carré conserve l'ordre sur les positifs

$\iff 0 \leq u_{k+1} \leq 3$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

↪ **Conclusion** La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de 0.


Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

 **Exercice 3 :** On donne ci-dessous trois propositions vraies.


1. Pour tout entier $n \geq 4$, $2^n > n^2$

2. Pour tout réel $x > 0$, $(x + 1)^3 \geq 1 + 3x$
3. Pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^3 = 2n^4 - n^2$


Pour lesquelles peut-on envisager une démonstration par récurrence (que l'on ne fera pas) ?

 **Exercice 4** : La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n , par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 - 2^n$

 **Exercice 5** : Considérons la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2^n$

 **Exercice 6** : On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et pour tout n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Démontrer chacune des propositions suivantes.


- La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
- La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
- Si $u_0 = 1$ la suite u est croissante.
- Si $u_0 = -2$, la suite u est décroissante.
- Si $u_0 = -0.5$, la suite u est stationnaire.


 **Exercice 7** :

- Montrer que les deux propositions suivantes sont héréditaires
(A) : « $10^n - 1$ est un multiple de 9 » (B) : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 »
- Sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

 **Exercice 8** :

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- On s'intéresse désormais à la somme S_n des cubes des n premiers entiers naturels impairs.
 - Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
 - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = 2n^4 - n^2$
 - Quel est l'entier n pour lequel $S_n = 41328$?

 **Exercice 9** : Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^n$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_n(x) = nx^{n-1}$

 **Exercice 10** : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité de Bernoulli est vraie :

$$\forall x > 0, \text{ on a } (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

 **Exercice 11** :

1. Rappeler ce que signifie l'écriture $\binom{n}{k}$ pour n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

2. Compléter la propriété suivante, vu en première :

Pour tous n et k entiers tels que $0 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$

3. Ecrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.

4. Démontrer que pour tous réels a et b on a

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$


5. Quel lien observe-t-on entre les coefficients de développement et le triangle de Pascal ?

6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

formule appelée **formule du binôme de Newton**.

7. *Application* : développer $(a+b)^5$ sans calcul.

 **Exercice(s) du livre** : Déclic : n° 29-32 p 32

Symbole : **Algorithme** « Les tours de Hanoï » p 16