

EXERCICES : ANNALES SUR LES SUITES

Exercice 1 :

(5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Etude de propriétés de la fonction f

- a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- b. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.
- c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

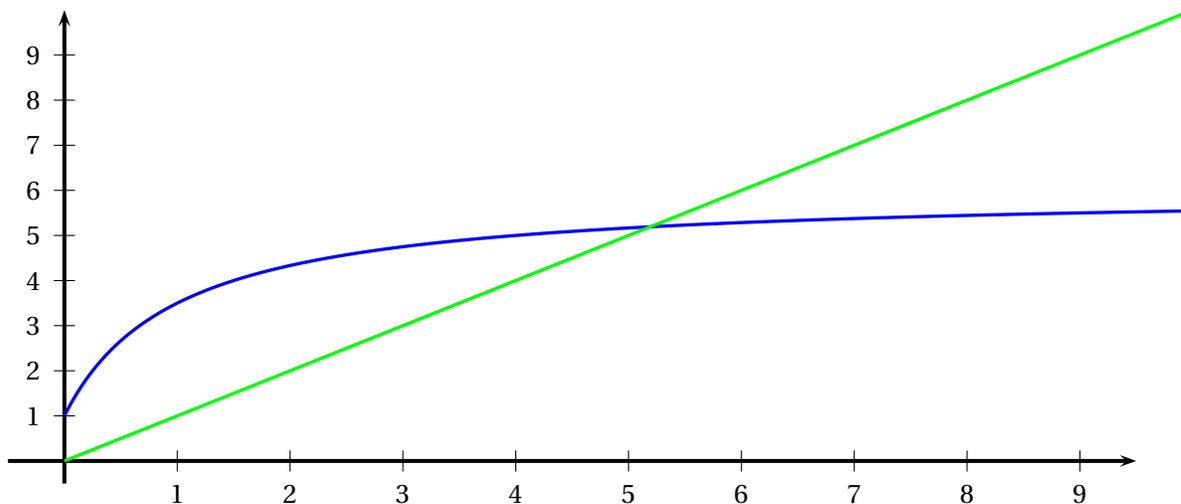
$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

- a. Sur le graphique représenté ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$. Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 .
Quelles conjectures peut-on mettre quant au sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
- b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?



 **Exercice 2** : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

(4 points)

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n , $v_n = u_n - 6$.

- Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- Démontrer que pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
- Etudier la convergence de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10} .
- Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Donner la nature de la suite (w_n) . Calculer w_{2009} .

 **Exercice 3** : Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

(4 points)

PARTIE A : On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

- Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
 - Calculer S_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (S_n) .

PARTIE B : Etant donné une suite (x_n) , de nombres réels, définie pour tout entier naturel n , on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.