Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

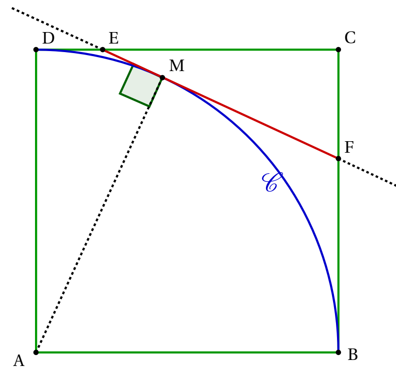
INTERROGATION N°20

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications.

Exercice 1. (10 points)

ABCD est un carré de côté 10. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle de centre A et de rayon AB contenu dans le carré ABCD. M est un point quelconque de $\mathscr{C}$. La tangente à $\mathscr{C}$ en M coupe les segments [BC] et [CD] en E et en F.

On se propose de trouver la position du point M sur $\mathscr{C}$ pour que la longueur EF soit minimale.



On pose BF $= x$ et DE $= y$. Le réel x appartient à l'intervalle $[0;10]$.

1. En comparant successivement dans les triangles AMF et ABF justifier que MF $= x$. Procéder de même pour justifier que ME $= y$. En déduire que
$$\text{EF} = x + y$$
2. En considérant le triangle CEF, démontrer que :
$$\text{EF}^2 = x^2 + y^2 - 20x - 20y + 200$$
puis, en utilisant le fait que EF $= x + y$, que
$$y(2x+20) = -20x + 200$$
3. En déduire que $y = \dfrac{100-10x}{x+10}$
4. En déduire enfin que que EF $= x + y = \dfrac{x^2+100}{x+10}$.
5. On considère la fonction f définie sur $[0;10]$ par :
$$f(x) = \frac{x^2+100}{x+10}$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   (b) En déduire que la valeur minimum de EF est $20\sqrt{2} - 20$ et que dans ce cas, BE = DF.