

DEVOIR SURVEILLÉ 6

Exercice 1.

(3 points)

On sait qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p > \frac{1}{2}$. On sait aussi que :

$$V(X) = 2$$

1. Rappeler la formule donnant l'espérance et la variance d'une loi binomiale.
2. Déterminer la valeur de p .
3. En déduire $E(X)$.

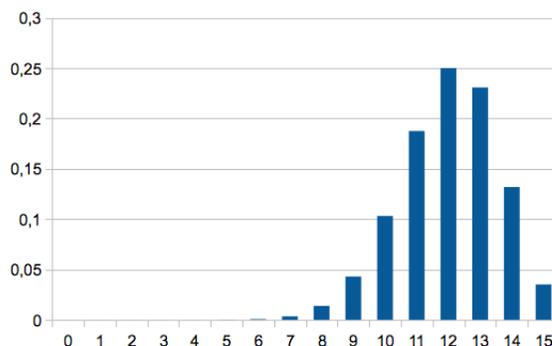
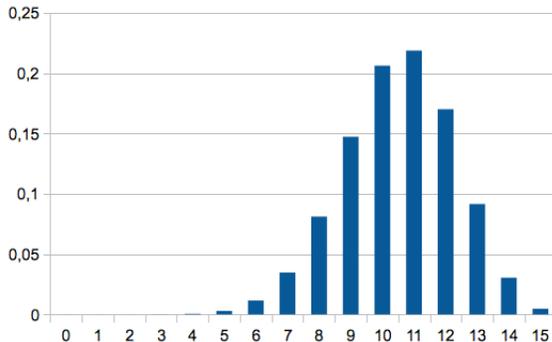
Exercice 2.

(8 points)

Un homme se présente dans un village Syldave et se déclare devin. Les habitants sceptiques le soumettent à une série de tests, il se trouve que dans 8 cas sur 10 notre homme devine la bonne réponse.

On lance 15 fois de suite une pièce de monnaie Syldave bien équilibrée, on admet que l'homme « devin » a 8 chances sur 10 de prévoir le bon résultat. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons résultats donnés par l'homme « devin ».

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ; en donner ses paramètres. *Justifier.*
2. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » ne donne aucune bonne réponse.
3. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » donne exactement 8 bonnes réponses.
4. Calculer la probabilité pour que l'homme « devin » donne au moins une bonne réponse.
5. Finalement, l'homme « devin » donne 11 bonnes réponses, peut-il être satisfait de lui-même ?
6. Parmi les deux diagrammes en barre suivant, lequel peut représenter la loi de probabilité de X ? *Justifier.*



7. Avant chaque réponse de l'homme « devin », le lanceur (de la pièce de monnaie) paie 3 pièces Syldave en cas de bonne réponse de l'homme « devin », et en cas de mauvaise réponse l'homme « devin » paie 2 pièces Syldave.
 - (a) Combien l'homme « devin » peut-il espérer gagner d'argent lors d'une série de 100 lancers ? *Justifier.*
 - (b) Les hommes « devin » Syldave voient leur probabilité divinatoire baisser en vieillissant. A partir de quelle probabilité de réussite ce « métier » lui permet-il de gagner plus de 150 pièces Syldave en 100 lancers ?

Exercice 3.

(8 points)

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p .

Un trajet coûte 10€. En cas de fraude, l'amende est de 100€.

Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés (ce n'est pas bien du tout!).

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. Quelle loi suit X . Justifier.

2. On suppose que $p = 0.05$.
 - (a) Calculer à 10^{-4} près $P(X = 5)$. Interpréter.
 - (b) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au moins une fois.
 - (c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
 - (a) Justifier que $Z = 400 - 110X$.
 - (b) Calculer $E(Z)$.
4.
 - (a) La fraude est-elle favorable ou non pour Théo ?
 - (b) Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?

Exercice 4.

(8 points)

Le druide de Gattaca a besoin pour préparer sa potion magique de champignons syldave. Il envoie 11 vaillants citoyens les chercher. Parsemé de périls et d'embûches on estime qu'un citoyen (aussi vaillant soit-il) a 2 chances sur 17 de périr pour aller dans la forêt et tout autant pour revenir à Gattaca.

1. Calculer la probabilité qu'un citoyen revienne vivant de l'excursion. *on pourra s'aider d'un arbre de probabilité.*
2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de survivant.
 - (a) Expliquer pourquoi $X \leftrightarrow B\left(11; \frac{225}{289}\right)$
 - (b) Calculer la probabilité qu'au moins un citoyen ramène des champignons syldave nécessaire à la préparation de la potion magique.
 - (c) Calculer $p(X = 0)$ et $p(X = 1)$.
 - (d) En déduire la probabilité qu'au moins deux citoyens ramène des champignons syldave.
 - (e) Calculer $E(X)$. Interpréter.
3. Lance, un jeune cycliste Syldave, n'a pas la permission de consommer les champignons préparés par le druide, il décide donc de se débrouiller tout seul. Pendant une semaine tous les matins, Lance part chercher les fameux champignons et revient le soir afin de les préparer et de les manger.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Lance a pu manger des champignons syldave.
 - (a) Donner $p(Y = 1)$ et $p(Y = 2)$.
 - (b) Recopier et compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Y = k)$								

Exercice 5.

(3 points)

Un joueur effectue une série de 7 lancers francs. Il réussit chacun des lancers francs avec une probabilité égale à p . Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de p , à 10^{-2} près, telle qu'on soit sûr à plus de 99% que le joueur réussisse au moins un des sept lancers francs.

Exercice 6.**Question Cactus**

Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la 7ème rue et de la 33ème avenue. La caserne se trouve à l'angle de la 15ème rue et de la 40ème avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ?