DEVOIR COMMUN 1S1 ET 1S3

Exercice 1. Fonctions de références (5 points)

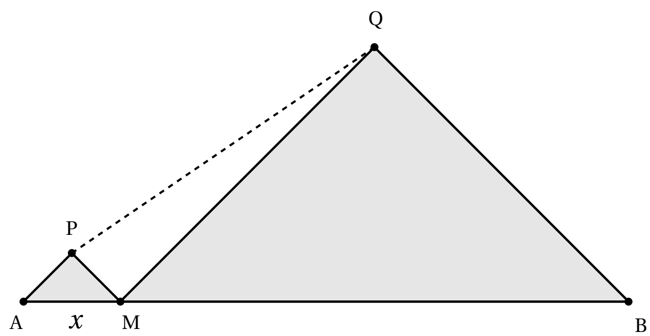
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2|1-x| - |x+3|$$

1. Ecrire $f(x)$ sans utiliser les valeurs absolues.
   On pourra vérifier que pour tout réel $x > 1$ on a $f(x) = x - 5$
2. En déduire le tableau de variation de f.
3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui lequel ?
4. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé.
5. Déterminer, graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.
   On se contentera de valeurs approchées.

Exercice 2. Second degré (5 points)

Soit [AB] un segment de longueur 4 cm et soit M un point sur [AB]. Considérons les points P et Q tels que les triangles APM et BQM soient isocèles et rectangles respectivement en P et Q :



1. Justifier que
$$\mathrm{PM}^2 = \frac{x^2}{2}$$
2. De la même façon, exprimer QM^2 en fonction de x.
3. (a) Justifier que le triangle PQM est rectangle en M.
   (b) En déduire que
$$\mathrm{PQ}^2 = x^2 - 4x + 8$$
4. (a) Résoudre l'équation
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
   (b) Existe-t-il des points M tels que la distance PQ soit égale à 2 ?
5. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0;4]$ par
$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$
   Indication : On pourra déterminer la forme canonique de f puis en déduire son tableau de variation
   (b) En déduire la position du point M pour que la distance PQ soit minimale. Préciser alors cette longueur PQ.

Exercice 3. Trigonométrie (4 points)

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

   i. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ii. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

   (b) Donner les solutions des 2 équations précédentes appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$.

2. On prend 4 cm comme unité graphique.
   On sait qu'un réel x appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ et que $\sin x = \dfrac{1}{4}$.

   (a) Placer x sur le cercle trigonométrique.

   (b) Quel est le signe de $\cos x$?

   (c) Calculer $\cos x$ (en donner une valeur exacte).

Exercice 4. Probabilité (5 points)

Afin de financer son voyage scolaire Sarah décide d'organiser une tombola.
Elle dispose de 50 tickets qu'elle vends 8 € chacun ; 15 d'entre eux sont gagnants et rapportent chacun aux heureux vainqueur la coquette somme de 20 €. Les autres tickets sont perdants.

1. (a) Le voyage scolaire coûte à Sarah 120 €. En supposant qu'elle vende tous les tickets fabriqués, cette tombola a-t-elle permis de financer son voyage ?

   (b) Sarah souhaite que cette tombola finance à l'euro près son voyage scolaire. Si elle ne modifie pas le prix du ticket et le nombre de ticket gagnant quelle récompense m doit-elle proposer pour chacun des 15 tickets gagnants ?

2. Léo achètent deux tickets à Sarah.
   On note T_1 l'événement « le premier ticket acheté par Léo est gagnant » et T_2 l'événement « le second ticket acheté par Léo est gagnant ».

   (a) Réaliser un arbre pondéré qui modélise cette expérience aléatoire.

   (b) Soit A l'événement « les deux tickets de Léo sont gagnants », montrer que :

   $$p(A) = \frac{3}{35}$$

   (c) Soit B l'événement « Léo a acheté exactement un ticket gagnant sur les deux », déterminer $p(B)$.

   (d) On note G la variable aléatoire donnant les gains de Léo.
   Reproduire et compléter le tableau suivant (en détaillant les calculs) :

G	-16	...	...	Total
$p(G = x_i)$	...	...	...	...

   (e) Calculer l'espérance de G. Interpréter.

Exercice 5. Vecteurs (6 points)

A, B et C sont trois points non alignés du plan. Les points G et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CA}$$

PARTIE A.

1. Démontrer que
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
2. Compléter la figure donnée en annexe 1.
3. Exprimer $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Que peut-on dire du quadrilatère AGBF ? (justifier).

PARTIE B.

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

1. Expliquer pourquoi $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan.
2. Donner les coordonnées de A, B, C et G puis prouver que $F(-1;-3)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
3. Préciser un vecteur directeur de (BF) puis déterminer l'équation de la droite (BF).
4. La droite d'équation $\mathscr{D} : \frac{3}{2}x+y=0$ que l'on tracera est-elle parallèle à (BF) ?
5. Le point $E\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ est-il un point de $\mathscr{D}$?

Exercice 6. Suites Numériques (5 points)

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données:
u est un nombre réel.
i et n sont des nombres entiers.

$u := -\dfrac{1}{2}$
Entrer n
Pour i allant de 1 à n **Faire**
    $u := 2u - 1$
Fin Pour
Afficher u

1. (a) Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre $n = 1$? et $n = 5$?
   (b) Que fait cet algorithme ?
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

   (a) Donner la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Dans un repère donnée en annexe, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3.
   (c) Conjecturer le sens de variation de la suite u et sa limite.
3. On **admet que** la suite u peut se définir pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -\frac{3}{2} \times 2^n + 1$$

   (a) Vérifier cette formule en calculant u_0 ; u_1 ; u_2 et u_5.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

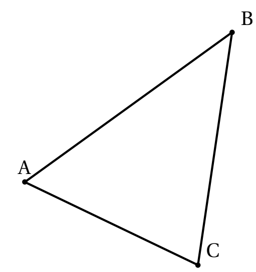
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2} \times 2^n$$

   (c) En déduire le sens de variation de la suite u.
4. **Bonus** : Modifier l'algorithme de départ afin que pour un tout nombre réel A > 0 entré par l'utilisateur il renvoie le premier entier n tel que

$$u_n < -\mathrm{A}$$

Nom : . . . . **Prénom :** . . . . Classe :. . . . . .

Annexe 1 : Exercice sur les vecteurs



Annexe 2-Exercice sur les suites