Devoir maison : préparation au devoir commun

Exercice 1.

PARTIE A.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$$

. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

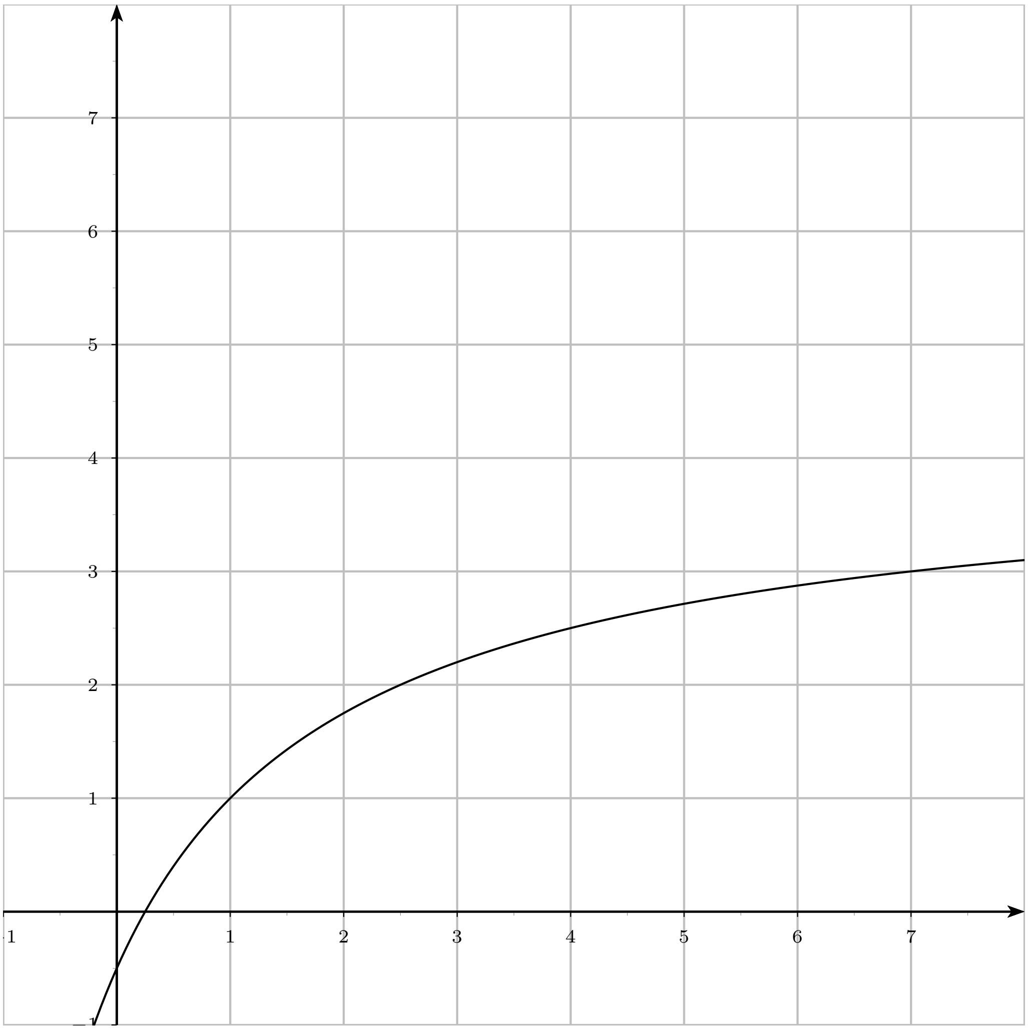
1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f ?
2. Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f..
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ puis interpréter graphiquement le résultat.
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$? Donner leur équation.

PARTIE B.

On définit la suite de nombres réels (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Utiliser la courbe de f donnée ci-contre pour construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.



2. Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$$

(b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

(c) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

(d) Calculer la somme

$$v_9 + v_{10} + \cdots + v_{2013}$$

4. (a) Démontrer que

$$u_n = \frac{18+5n}{3+5n}$$

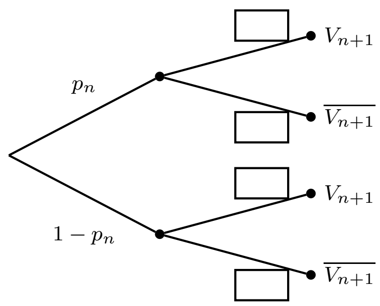
(b) Etudier le sens de variations de la suite (u_n)

Exercice 2. Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Réaliser un arbre pondéré jusqu'au 3[e] sondages.
2. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : « les 2[e] et 3[e] sondages sont positifs » ;
   (b) B : « les 2[e] et 3[e] sondages sont négatifs ».
3. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3[e] sondage soit positif.
4. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Recopier et compléter l'arbre ci-contre en fonction des données de l'énoncé :



5. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
6. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

Exercice 3.

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que :
• 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
• 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'événement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'événement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{\text{C}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent les événements contraires respectifs de C et T.
La partie 4 est indépendante des questions précédentes.

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous (on donnera les résultats en pourcentages) :

	C	$\overline{C}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			100

2. Que signifie l'événement $C \cap T$? Calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité $p(T)$ que la pièce soit acceptée par le test.
4. On suppose pour la suite que la probabilité que l'article soit accepté par le test est de 0,882.
   On prélève successivement 20 articles dans la production et on suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour que le tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise. On donnera les résultats arrondis aux millièmes si nécessaire.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'articles acceptés par le test parmi les 20 articles prélevés au hasard.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité que 18 des 20 articles soient acceptés par le test.
   On écrira le calcul effectué.
   (c) Comment peut-on noter la probabilité que au maximum 18 articles soient acceptés par le test ? Calculer cette probabilité.
   (d) Quelle est la probabilité que au moins un articles soient refusés par le test ?
   (e) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.

Exercice 4. Soient f et g les fonctions définies sur $I =]-4;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x + 4}$ et $g(x) = 2(x^3 + 6x^2 + 1)$

1. Calculer la dérivée de f sur I.
2. (a) Etudier les variations de g sur I.
   (b) En déduire le signe de g sur I.
3. (a) Utiliser ce qui précède pour établir le tableau de variations de f sur I.