

DEVOIR MAISON 7 : DÉRIVATION

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x , puis en déduire les variations de la fonction f .
3. Donner, s'ils existent, le minimum et le maximum de f sur $[-4; 4]$.

Exercice 2. On considère la fonction h définie et dérivable sur \mathbb{R} par :

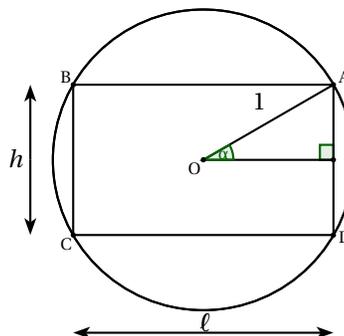
$$h(x) = 3x^3 + 11x^2 + 5x$$

1. Calculer $h'(x)$, étudier le signe de $h'(x)$ en fonction des valeurs de x puis en déduire le sens de variation de h .
2. En déduire le nombre de solution de l'équation $h(x) = 3$.
3. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus grande des solutions et les valeurs exactes des autres solutions.
4. Résoudre l'inéquation $h(x) > 3$.

Exercice 3.

Dans un tronc d'arbre circulaire, on découpe une poutre de forme parallélépipédique rectangle. La résistance à la flexion de cette poutre varie comme le produit $\ell \times h^2$ où ℓ et h sont les dimensions ci-contre :

On prend comme unité de longueur le rayon du tronc d'arbre.



1. Montrer que $h^2 = 4 - \ell^2$
2. En déduire que $\ell h^2 = -\ell^3 + 4\ell$.
3. Soit $f(x) = -x^3 + 4x$ pour $x \geq 0$.
 - (a) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - (b) Comment choisir ℓ et h pour que la poutre résiste au mieux à la flexion ?
 - (c) Quel est l'angle α correspondant à $0,1^\circ$ près.

Exercice 4. Un industriel doit fabriquer une boîte fermée de volume 1 dm^3 ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur y et dont la base est un carré de côté $x > 0$. L'unité de longueur est le décimètre.

1. Justifier que $y = \frac{1}{x^2}$
2. En déduire que l'aire totale de la boîte est :

$$S(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

3. Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$S'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

4. (a) Dresser le tableau de signe de S' sur $]0; +\infty[$.
- (b) En déduire le tableau de variation de S sur $]0; +\infty[$.
- (c) Donner les dimensions de la boîte d'aire minimale.