DEVOIR MAISON 1 : LE NOMBRE D'OR

Exercice 1. **Le nombre d'or**

On appelle nombre d'or le nombre noté φ défini par :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1. Montrer que $\varphi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
2. Montrer que $1+\varphi = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
3. En déduire que le nombre d'or est une solution de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

Exercice 2. **Le rectangle d'or**

On dit qu'un rectangle est d'or si et seulement si le rapport de sa longueur sur sa largeur vaut φ, le nombre d'or i.e :

$$\frac{\mathrm{L}}{\ell} = \varphi$$

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Tracer un carré ABCD tel que AB = 2 (l'unité est celle de votre choix).
- Placer le milieu I du segment AB.
- Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre I passant par D.
- Prolonger le côté [AB] et noté E le point d'intersection entre [AB] et $\mathscr{C}$.
- Tracer, en rouge, le rectangle dont la longueur est le côté [AE] et la largeur le côté [AD].

Conjecture : Nous prétendons que le rectangle ainsi construit est d'or.

1. Montrer que $\mathrm{ID} = \sqrt{5}$.
2. En déduire la longueur AE, puis conclure que :

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \varphi$$

Exercice 3. **Le triangle d'or**

On dit qu'un triangle isocèle est d'or si et seulement si le rapport de sa plus grande longueur sur sa plus petite longueur vaut φ (le nombre d'or).

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Tracer un triangle rectangle isocèle en A, AEC avec AE = AC = 1 (l'unité est celle de votre choix).
- Construire le point B symétrique de A par rapport à E.
- Tracer [CB], puis reporter la longueur CB sur la demi-droite [AC) afin d'obtenir le point D. (on a ainsi AD = AC + CB.)
- Tracer la médiatrice Δ du segment [AB].
- Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par D. O est le point d'intersection entre Δ et $\mathscr{C}$.
- Tracer en jaune le triangle ABO, que nous prétendons être d'or.

1. Montrer que $\mathrm{CB} = \sqrt{5}$. En déduire que $\mathrm{AO} = 1+\sqrt{5}$.
2. En déduire que $\dfrac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AB}} = \varphi$.
3. Dans le triangle AEO, en utilisant la trigonométrie et votre calculatrice, trouver la valeur de l'angle $\widehat{\mathrm{EAO}}$, et en déduire la valeur de chacun des angles du triangles ABO.

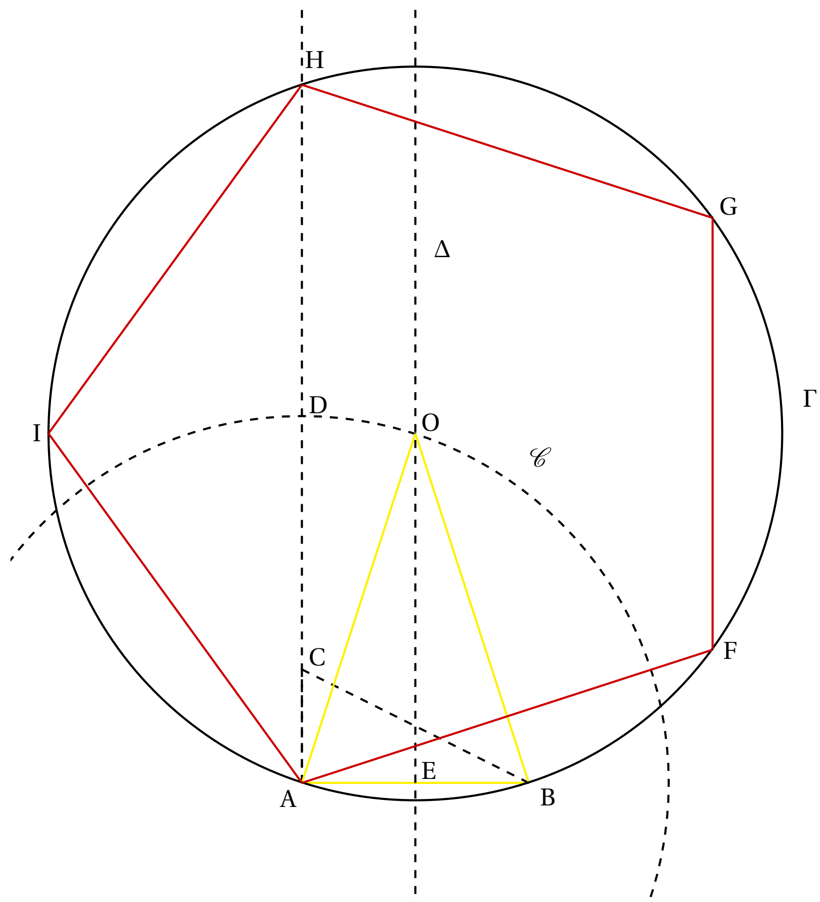
Exercice 4. **Le pentagone régulier**

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Reproduire la figure de l'exercice précédent i.e un triangle d'or, noté comme dans l'exercice précédent ABO.
- Tracer le cercle Γ de centre O passant par A.
- Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B passant par A. Il coupe Γ en F.
- Tracer le segment [AF], puis tracer le cercle de centre F passant par A. Il coupe Γ en G. Tracer le segment [FG].
- Tracer le cercle de centre G passant par F qui coupe Γ en H. Tracer [GH].
- Enfin tracer le cercle de centre H passant par G, il coupe Γ en I. Tracer [HI] et [IA]. Nous prétendons que AFGHI est un pentagone régulier inscrit dans Γ i.e que tous ses côtés font la même longueur.

1. Donner la mesure des angles $\widehat{AOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$, $\widehat{HOI}$ et enfin $\widehat{IOA}$.
2. Expliquer pourquoi AFGHI est un pentagone régulier.

Aide : On pourra s'inspirer de la figure (simplifiée) suivante pour construire les figures des exercices 3 et 4, mais vous n'effacerez aucun trait de construction.



Question :

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$. L'intersection entre cette bissectrice et (OB) est noté J. Expliquer pourquoi JAB est encore un triangle d'or.