Correction du DS

Exercice 1 $\quad g(x)=x^2-x$

On calcule le tx de variations de g entre 3 et $3+h$: pour tout $h\neq 0$, $\dfrac{g(3+h)-g(3)}{h}=\dfrac{(3+h)^2-(3+h)-(3^2-3)}{h}=5+h$.

Qd $h\to 0$, $5+h$ tend vers 5 donc $g'(3)=5$.

Exercice 2

Q1a. Lectures d'images :

f(-1) = 2 $\quad$ f(2) = - 4 $\quad$ f(4)=4

Lectures de nombres dérivés, c'est-à-dire de coeff. dir. de tangentes :

f'(-1) = 1 $\quad$ f'(2) = 3 $\quad$ f'(4) = 0

Q1b. En 7 : Tangente à tracer en surlignant un vecteur de coordonnées $(3;-1)$

Q1c. En -3 : L'équation réduite est

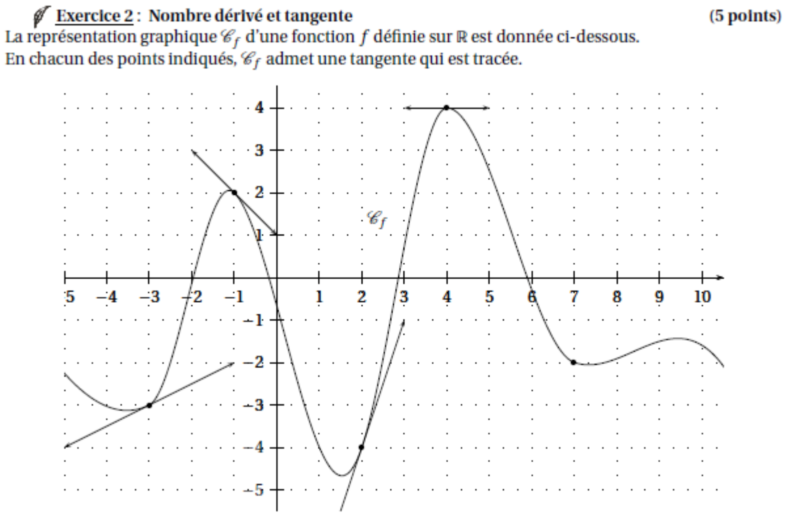
y = 0,5x -1,5

Q2. En 20 : Equation réduite de la tangente à Cf en 20 :

y = f'(20) (x-20) + f(20)

⇔ y = -3 (x-20) – 10

⇔ y = -3x+50



Exercice 3

On rappelle la prop.du cours : $\vec{u}(-b;a)$ est un vect. dir.de (d) ⇔ une éq. cart. de (d) est de la forme $ax+by+c=0$.

Q1a. Vect. Dir de (d1) : $\vec{u_1}=\overrightarrow{AB}(3;-1)$. $\quad$ Une équation cartésienne de (d1) est de la forme $-x-3y+c=0$.

Les coordonnées de A vérifient toute équation de la droite : donc $-1-3\times 2+c=0 \Leftrightarrow c=7$.

Conclusion : une équation cartésienne de (d1) est $-x-3y+7=0$.

Q1b. Vect. Dir de (d2) : $\vec{u}(-3;1)$. Une équation cartésienne de (d2) est de la forme $x+3y+c=0$.

Les coordonnées de C vérifient toute équation de la droite : donc $6+3\times(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=-3$.

Conclusion : une équation cartésienne de (d2) est $x+3y-3=0$.

Q1c. Eq. réduite de (d3) : $y=-x/3+4$. $\quad y=-x/3+4 \Leftrightarrow 3y=-x+12 \Leftrightarrow x+3y-12=0$

Conclusion : une équation cartésienne de (d3) est $x+3y-12=0$.

Q2. $\vec{u_1}(3;-1)$ vecteur directeur de (d1) et $\vec{u}(-3;1)$ vecteur directeur de (d2) et (d3) (cf prop.) sont colinéaires.

Donc les trois droites (d1), (d2) et (d3) sont parallèles.

Q3a. On nomme P1, P2 et P3 les trois points d'abscisses 0 appartenant respectivement à (d1), (d2) et (d3).

Avec l'équation de (d1) : $-0-3y_1+7=0 \Leftrightarrow y_1=7/3$. $\quad$ D'où les coordonnées de P1 $(0;7/3)$.

Avec l'équation de (d2) : $0+3y_2-3=0 \Leftrightarrow y_2=1$. $\quad$ D'où les coordonnées de P2 $(0;1)$.

Avec l'équation de (d3) : $0+3y_3-12=0 \Leftrightarrow y_3=4$. $\quad$ D'où les coordonnées de P3 $(0;4)$.

Q3b. Les trois droites (d1), (d2) et (d3) sont parallèles. Les ordonnées des points P1, P2 et P3 qui ont la même abscisse permettent donc de donner les positions relatives des trois droites.

Comme $y_3>y_1>y_2$, la droite (d3) est dessus de (d1) qui elle-même est au-dessus de (d2).

Exercice 4 $\quad f(x)=x^2+2x \quad g(x)=-2x^2-3x+2$

Q1. Pour tout réel x, $f(x)=x^2+2x$ et $g(x)=-2x^2-3x+2$.

Donc $g(x)-f(x)=-2x^2-3x+2-(x^2+2x)=-3x^2-5x+2$.

Q2a. L'équation du second degré $-3x^2-5x+2=0$ se résout avec le discriminant :

$\Delta = 49 > 0$ d'où deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{5-7}{2\times(-3)} = \dfrac{1}{3}$ et $x_1 = \dfrac{5+7}{2\times(-3)} = -2$.

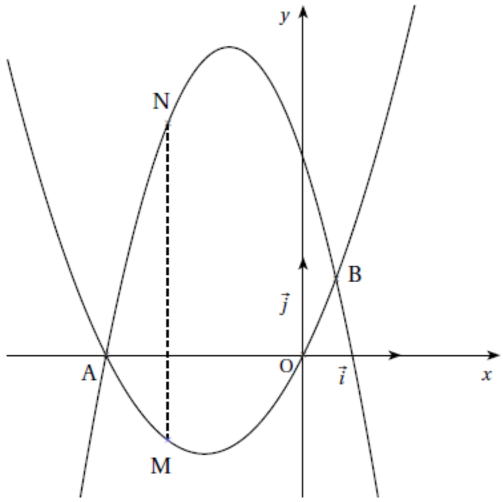
Q2b. $-3x^2 - 5x + 2$ a un coefficient dominant négatif donc il est représenté par une parabole tournée vers le bas.
Le tableau de signes est donc le suivant :

x	$-\infty$		-2		$1/3$		$+\infty$
Signe de $g(x) - f(x)$		-	0	+	0	-	

Q3a. Les abscisses de A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire -2 et $1/3$.
Les ordonnées de A et B sont les images de ces solutions par l'une ou l'autre des fonctions.

$f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) = 0$ et $f(1/3) = (1/3)^2 + 2\times(1/3) = 7/9$. D'où les coordonnées de A $(-2;0)$ et de B $(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{9})$.

Q3b. Vu le signe de $g(x) - f(x)$, C_g est au-dessus de C_f sur $\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$ et en dessous de C_f sur $\left]-\infty;-2\right] \cup \left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.



Sur l'intervalle $\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$, C_g est au-dessus de C_f ; donc pour tout x de cet intervalle $g(x) \geq f(x)$.
Les coordonnées de M sont $M(x; f(x))$ et celles de N sont $N(x; g(x))$.
La longueur MN est donc simplement exprimée par $g(x) - f(x)$.
Il reste donc à trouver le maximum du trinôme $-3x^2 - 5x + 2$ sur l'intervalle $\left[-2;\dfrac{1}{3}\right]$.
Or ce trinôme admet un maximum sur $\mathbb{R}$ (cf forme de la parabole) en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-5}{2\times(-3)} = -\dfrac{5}{6}$ qui appartient à l'intervalle.

La longueur maximale du segment MN est donc : $g\left(-\dfrac{5}{6}\right) - f\left(-\dfrac{5}{6}\right) = -3\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2 - 5\times\left(-\dfrac{5}{6}\right) + 2 = \dfrac{49}{12}$

<u>Exercice 5</u>

QA]1 L'algorithme ne peut renvoyer qu'une liste de cinq nombres entiers différents compris entre 1 et 50.
En effet, la condition écrite dans la boucle « Tant que » n'est fausse que lorsque les cinq nombres a, b, c, d et e sont tous différents. Les seules listes possibles renvoyées par l'algorithme sont L2 et L4.
L1 n'est pas possible puisque 2 est écrit deux fois.
L3 n'est pas possible puisque les entiers choisis au hasard sont inférieur ou égal à 50 (et L3 contient 57).
QA]2. Cet algorithme permet de choisir une liste de 5 coureurs au hasard pour le contrôle antidopage à la fin d'une étape.

QB]1. Chaque dossard est équiprobable lors d'un tirage. Le dossard de Ben a donc une probabilité de $\dfrac{5}{50} = 0{,}1$ d'être tiré.
Chaque tirage de cinq dossards au hasard à la fin d'une étape est une épreuve de Bernoulli. L'évènement : « Ben est choisi » est désigné comme étant le succès. Le paramètre de l'épreuve de Bernoulli est donc $0{,}1$. On répète douze de façon identique et indépendantes cette épreuve de Bernoulli. La variable aléatoire X qui dénombre les contrôles subis par Ben suit la loi binomiale $B(12;0{,}1)$.

QB]2. $P(X=5) = \dbinom{12}{5} 0{,}1^5 \times 0{,}9^7 \approx 0{,}0038$ $P(X=0) = \dbinom{12}{0} 0{,}1^0 \times 0{,}9^{12} \approx 0{,}2824$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0{,}7176$

QB]3. $E(X) = np = 12\times 0{,}1 = 1{,}2$ En moyenne, Ben peut espérer être contrôlé 1,2 fois sur les douze étapes…

QC] Soit G la variable aléatoire qui désigne le gain de Ben au terme des douze étapes.

La loi de probabilité de G est donnée par le tableau suivant :

G= gi	0	2000	4000	…	24000	-11000
P(G=gi)	p0	p1	p2	…	p12	0,7176

Somme = 1

L'évènement G= -11000 est aussi l'évènement $X \geq 1$. La probabilité de cet évènement est connue ($\approx 0,7176$).
Par conséquent, la somme des probabilités inconnues p0, p1,…, p12 est de 0,2824.

$$E(G) = \sum_{i=0}^{12} p_i \times 2000i + (-11000) \times 0,7176$$

Vu que la somme des pi vaut 0,2824 et que les gains sont tous inférieurs à 24000, la somme $\sum_{i=0}^{12} p_i \times 2000i$ est inférieure à $0,2824 \times 24000$. Donc $E(G) \leq 0,2824 \times 24000 - 11000 \times 0,7176 = -1116$ €

L'espérance de gain est de toute façon négative. Ben n'a pas intérêt financièrement à se doper.
Remarque : A noter que s'il ne se dope pas son espérance de gain est nécessairement positive puisqu'aucun des gains possibles n'est négatif…

Exercice 6 : QCM **(5 points)**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chaque question, une seule des réponses proposées est juste. Entourer sur votre énoncé les réponses correctes. **Aucune justification n'est demandée.**

1. Le plus grand ensemble de définition possible de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x-3}}$ est :

   a. $[-3;+\infty[$ **b.** $]-3;+\infty[$ **c.** $]-\infty;-3]$ **d.** $]-\infty;-3[$

2. On donne l'algorithme ci-contre.
   La valeur de u affichée en sortie lorsque l'utilisateur saisit la valeur 3 pour n est :

   a. 644 **c.** 201.8
   b. 586.4 **d.** 551.84

Algorithme 1 :

Variables
  n et i sont des nombres entiers
  u est un nombre réel
Début
  Saisir n
  u prend la valeur 900
  Pour i allant de 1 à n **Faire**
    u prend la valeur $0.6 \times u + 200$
  Fin Pour
  Afficher u
Fin

3. L'algorithme de la question précédente permet de calculer les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de premier terme $u_0 = 900$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   a. $u_n = 0.6n + 200$ **b.** $u_n = 0.6u_{n+1} + 200$ **c.** $u_{n+1} = 0.6n + 200$ **d.** $u_{n+1} = 0.6u_n + 200$

4. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3n^2 - 2n + 4$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} - v_n =$

   a. v_1 **b.** $2n + 10$ **c.** 1 **d.** $6n + 1$

5. On considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ telle que $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 4$.
   La valeur de w_2 est :

   a. 19 **b.** 59 **c.** 51 **d.** Autre réponse

Q1. Le plus grand ensemble de définition de la fonction f est $]-\infty;-3[$ (Réponse d)

Q2. L'algorithme renvoie en sortie 586,4 (Réponse b)

$0,6 \times 900 + 200 = 740$ $0,6 \times 740 + 200 = 644$ $0,6 \times 644 + 200 = 586,4$

Q3. L'algorithme précédent permet de calculer les termes de la suite telle que $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$. (Réponse d)

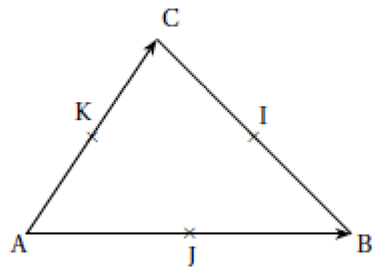
Q4. our tout entier n, $v_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 4$ donc $v_{n+1} - v_n = 6n + 1$ (Réponse d)

Q5. $w_1 = 3w_0 - 2 \times 0 + 4 = 19$ puis $w_2 = 3w_1 - 2 \times 1 + 4 = 59$ (Réponse b)

Exercice 7 : Vecteurs (6 points)

On considère un triangle quelconque ABC comme ci-contre.
On nomme I le milieu de [BC], J celui de [AB] et K celui de [AC].
On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
Ce repère n'est pas nécessairement orthonormé et :

- A *désigne l'origine du repère,*
- $\overrightarrow{AB}$ *désigne le vecteur unité de l'axe des abscisses,*
- $\overrightarrow{AC}$ *désigne le vecteur unité de l'axe des ordonnées.*



Le point d'équilibre du triangle, dit isobarycentre, est le point $G(x_G; y_G)$, intérieur au triangle tel que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

1. Donner sans justifier les coordonnées de A, B et C dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
2. a. Ecrire les coordonnées de $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ en fonction des coordonnées de G.
   b. Déduire de l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ que $x_G = y_G = \frac{1}{3}$
3. a. Justifier que les coordonnées de I dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ sont $x_I = 0.5$ et $y_I = 0.5$.
   b. Démontrer que les points A, G et I sont alignés.
4. On admet que de la même façon, les points C, G et J sont alignés.
   Que peut-on en déduire pour la nature du point G dans le triangle ABC ?

Q1. Dans le repère choisi $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$: $A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$

Q2a. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}(0-x_G+1-x_G+0-x_G;0-y_G+1-y_G+0-y_G)$ soit $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}(1-3x_G;1-3y_G)$.

Q2b. Vu que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, alors $1-3x_G=0$ et $1-3y_G=0$.

La résolution de ces deux équations donne $x_G = y_G = 1/3$.

Q3a. Si I est le milieu de [BC], alors $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{1+0}{2} = 0,5$ et $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5$.

Q3b. Coordonnées de $\overrightarrow{AG}(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ et coordonnées de $\overrightarrow{AI}(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Mêmes coordonnées que G et I car A est l'origine.

Donc $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}$ ce qui indique que les deux vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires : on en déduit que les trois points A, I et G sont alignés.

Q4. Puisque G est sur la médiane (AI) et aussi sur la médiane (CJ), G est le point d'intersection des trois médianes, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle ABC. A noter que l'égalité $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AI}$ précise que G est au deux tiers de la médiane (AI) en partant du sommet A…