DEVOIR MAISON 3 : CORRECTION

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{|x|}$

1. $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par définition *(distance à 0 de x)*.
Donc $\sqrt{|x|}$ existe toujours : il n'y a pas de valeur interdite. D'où $D_f = \mathbb{R}$.

2. Il est important de *JUSTIFIER* cette question.
On peut par exemple, raisonner par **tableaux de variations successifs**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$\sqrt{\lvert x\rvert}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Algorithme de calcul : $x \longmapsto |x| \longmapsto \sqrt{|x|}$

Première ligne : d'après les cours

Deuxième ligne : car la fonction racine carré est croissante sur R^+, donc conserve l'ordre sur les positifs.

Autre méthode rencontrée dans les copies : par **inégalités successives sur les bons intervalles**

Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}^-$ tels que $a < b < 0$.
Alors on a :

$$\begin{aligned} & a < b < 0 \\ \Longleftrightarrow\ & |a| > |b| > 0 \quad \text{car la fonction valeur absolue est décroissante sur les négatifs} \\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{|a|} > \sqrt{|b|} > 0 \quad \text{car la fonction racine carré est croissante sur les positifs} \\ \Longleftrightarrow\ & f(a) > f(b) > 0 \quad \text{l'ordre a changé} \end{aligned}$$

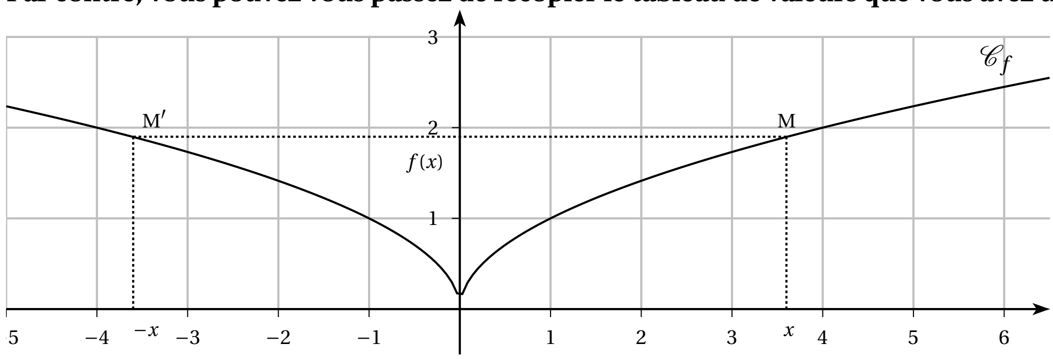
Donc f est décroissante sur les négatifs.

Soient a et b appartenant à $\mathbb{R}^+$ tels que $0 < a < b$.
Alors on a :

$$\begin{aligned} & 0 < a < b \\ \Longleftrightarrow\ & 0 < |a| < |b| \quad \text{car la fonction valeur absolue est croissante sur les positifs} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 < \sqrt{|a|} < \sqrt{|b|} \quad \text{car la fonction racine carré est croissante sur les positifs} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 < f(a) < f(b) \quad \text{l'ordre est conservé} \end{aligned}$$

Donc f est croissante sur les positifs.

3. Il convient de ne pas oublier l'*échelle* et de *placer précisément des points*. En particulier, on regarde plus *en détails* ce qui ce passe quand une fonction change de sens de variation (ici vers $x = 0$)
Par contre, vous pouvez vous passez de recopier le tableau de valeurs que vous avez utiliser.



4. Dans ces questions, j'attendais un minimum de calculs pour JUSTIFIER vos réponses ...

a. $M(x, y_M) \in \mathscr{C}_f$ donc son ordonnée est $y_M = f(x) = \sqrt{|x|} = \sqrt{x}$ car x est positif, d'où $|x| = x$.

b. $M'(-x, y_{M'}) \in \mathscr{C}_f$ donc son ordonnée est $y_{M'} = f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{x}$ car $-x$ est négatif, d'où $|-x| = x$.
Ainsi M et M′ ont la même ordonnée, autrement dit $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \geq 0$.

c. Il est clair que le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(0, f(x))$, donc il appartient à l'axe (Oy).
De plus $(MM')//(Ox)$ et $(Ox) \perp (Oy)$ donc $(MM') \perp (Oy)$.
Au final on en déduit : (Oy) est la médiatrice de $[MM']$.
Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

5. **a.** La fonction carré est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x)^2 = x^2$
   b. La fonction valeur absolue est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|-x| = |x|$
   c. La fonction cosinus est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos(-x) = \cos(x)$

Exercice 2 : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = -\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. **Si** $x < 0$

x	$-\infty$	0
$\sqrt{\lvert x\rvert}$	↘	0
$g(x) = -\sqrt{\lvert x\rvert}$	↗	0

Algorithme de calcul :
$x \longmapsto |x| \longmapsto \sqrt{|x|} \longmapsto -\sqrt{|x|}$

Première ligne : d'après l'exercice 1

Deuxième ligne : car multiplier par un nombre négatif inverse l'ordre.

Si $x \geq 0$, d'après le cours on a :

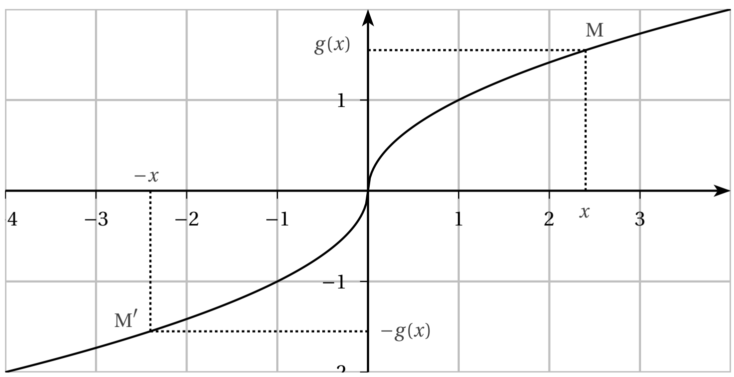
x	0	$+\infty$
$g(x) = \sqrt{x}$	0 ↗	

Donc **au final** on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↗

Autre méthode rencontrée dans les copies :
Si $x > 0$, alors $g(x) = \sqrt{x} = \sqrt{|x|} = f(x)$. Donc g est croissante (comme f) sur les positifs.
Si $x < 0$, alors $g(x) = -\sqrt{|x|} = -f(x)$. Donc g est croissante sur les négatifs (contrairement à f).

2.



3. **a.** $M(x, y_M) \in \mathscr{C}_g$ donc $y_M = g(x) = \sqrt{x}$ car x est positif.
   b. $M'(-x, y_{M'}) \in \mathscr{C}_f$ donc $y_{M'} = g(-x) = -\sqrt{|-x|} = -\sqrt{x}$ car $-x$ est négatif.
   Ainsi M et M′ ont des ordonnées opposées, autrement dit $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \geq 0$.
   c. Le milieu I de [MM′] a pour coordonnées

$$x_I = \frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{x + (-x)}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{\sqrt{x} + \left(-\sqrt{x}\right)}{2} = 0$$

   Le milieu de [MM′] est donc O, l'origine du repère.
   d. Ceci étant vrai pour tout point $M \in \mathscr{C}_g$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à l'origine O.

4. **a.** La fonction inverse est impaire. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$
   b. La fonction racine carré n'est ni paire, ni impaire (car non définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 !)
   c. La fonction sinus est impaire, car $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.