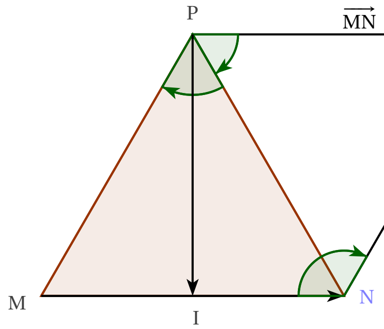
Devoir Maison 2 : Trigonométrie

Exercice 1 :

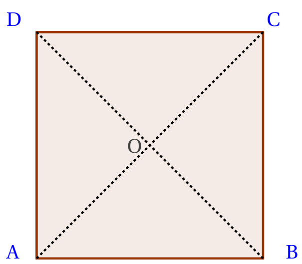


Graphiquement, et après avoir éventuellement déplacer certains vecteurs, on lit :

$(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PM}) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\qquad (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN}) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\qquad (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) = -\dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\qquad (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PI}) = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

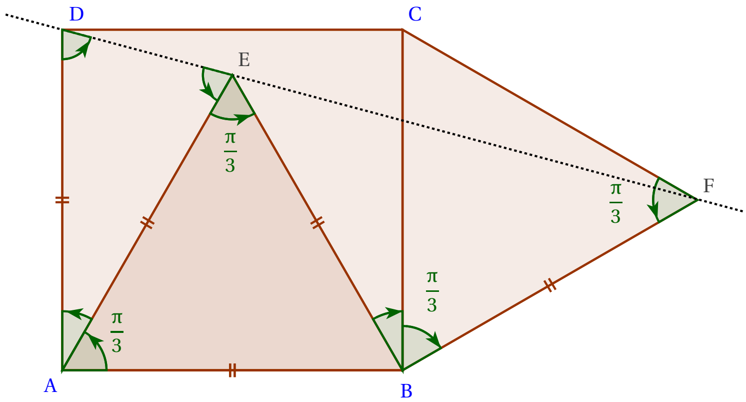
Exercice 2 :

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$ en mesure principale.
   Mais aussi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9}{4}$ par exemple.
2. On peut, là encore, déplacer les vecteurs, mais utilisons également les propriétés des angles associés pour nous entraîner.



$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) &= \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \pi \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}) = 0 \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AD}) &= (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) &= -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) &= \pi \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CO}) &= (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CO}) = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 3 :



1. Remarquons que coder la figure aide largement à répondre aux questions qui suivent ...

2. **a.** On sait que AEB est un triangle équilatéral, donc AB = AE.
On sait aussi que ABCD est un carré, donc AB = AD.
On en déduit de suite que AE = AD, donc AED est équilatéral en A.

b. Dans le triangle AED, on sait que les angles de la base sont égaux. En notant ces angles en angles orientés de vecteurs (avec la même orientation) on a donc $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$.
De plus, la somme des angles d'un triangle fait π radians (toujours avec la même orientation). Donc on a

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \pi \quad [2\pi] \\ \iff \quad & 2(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \pi \quad [2\pi] \\ \iff \quad & 2(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \pi - (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Or $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$
On en déduit que $2(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$.
Et donc que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = \frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$

3. $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
Ainsi le triangle EBF est rectangle en B. De plus il est isocèle car EB = AB = BC = BF.
On sait alors que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

4. **a.**
$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi \quad [2\pi]$$

b. On en déduit alors que l'angle $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$ est plat, donc les points D E et F sont alignés.