

DEVOIR MAISON 6 : LES SUITES



Exercice 1 : 60 p 125

1. $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1}$. Donc on a besoin d'abord de calculer u_1 .

$$u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2 \times 1}{2+3 \times 1} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Donc } u_2 = \frac{\frac{2}{5}}{2+\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{16} = \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \frac{\frac{1}{4}}{2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

2. $u_1 - u_0 = -\frac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 \neq -\frac{3}{5}$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3. a. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2+3u_n}{2u_n} - \frac{2}{2u_n} = \frac{2+3u_n-2}{2u_n} = \frac{3u_n}{2u_n} = \frac{3}{2}$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

- b. On sait alors que $v_n = v_0 + nr = 1 + \frac{3}{2}n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. On en déduit que $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a désormais la suite (u_n) sous sa forme explicite. Etudions les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{3}{2}x}$ sur $[0; +\infty[$ pour trouver les variations de (u_n) .

x	0	$+\infty$
Variations de $1 + \frac{3}{2}x$		
Variations de $\frac{1}{1 + \frac{3}{2}x}$		

Donc la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est du même sens de variation que f , à savoir strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

5. Grâce à la forme explicite de (u_n) , il est clair que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, on a $u_0 = 1$ et (u_n) strictement décroissante sur $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} < u_n < u_0 = 1$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.

Exercice 2 : 84 p 128

1. On a clairement $N_{p+1} = N_p - \frac{1.21}{100} N_p = N_p - 0.0121 N_p = 0.9879 N_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Par définition (N_p) est une suite géométrique de raison $q = 0.9879$ et de premier terme N_0 .
3. On sait alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $N_p = N_0 \times (0.9879)^p$.
4. On doit chercher p tel que $N_p = 0.43 N_0 \iff (0.9879)^p = 0.43$.
On fait un tableau de valeur sur la calculatrice ou sur tableur et on trouve :

$$0.9879^{70} < 0.43 < 0.9879^{69}$$

Donc la mort de l'organisme remonte à environ 69 siècles, soit 6 900 ans.

5. 10 000 ans correspondent à 100 siècles. On calcule donc

$$N_{100} = N_0 \times (0.9879)^{100} \approx 0.296 N_0$$

Donc il reste environ 29,6% de carbone 14.

Exercice 3 : 125 p 134

1. $\frac{1}{n}$ peut être rendu aussi proche de 0 que l'on veut si l'on prend n suffisamment grand. Donc (u_n) converge vers 0 quand n tend vers l'infini.
De même pour $v_n = \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n^3}$.
2. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.
3. On en déduit intuitivement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + v_n = 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3 + 0 = 3$$

Ajouter 3 à une expression aussi proche de 0 que l'on veut nous donne une expression aussi proche que l'on veut de 3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2v_n - w_n = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2 \times 0 - 0 = 0$$

On a deux expressions aussi proches de 0 que l'on veut, donc leur différence peut aussi être aussi proche de 0 que l'on veut aussi.

Exercice 4 : 126 p 134

1. n peut être aussi grand que l'on veut pour n suffisamment grand. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
De même pour $v_n = n^2$.
Par contre, $(-n^3) = -n^3$ peut être rendu aussi grand que l'on veut dans les négatifs pour n suffisamment grand. Donc (w_n) diverge vers $-\infty$ quand n tend vers l'infini.
2. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$.
3. On en déduit intuitivement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = - \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

On prend l'opposé d'une expression aussi grande que l'on veut, donc cela donne une expression aussi grande que l'on veut mais dans les négatifs.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -w_n - 100 = - \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - 100 = +\infty$$

On prend d'abord l'opposé d'une expression aussi grande que l'on veut dans les négatifs, donc cela donne une expression aussi grande que l'on veut dans les positifs. Enlever ensuite 100 à l'expression change rien : on pourra toujours la rendre aussi grande que l'on veut (il suffit de la choisir « 100 plus grande dès le départ »).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

On ajoute deux expressions aussi grandes que l'on veut, leur somme est donc aussi grande que l'on veut aussi.

Remarquons que nous n'aurions pas pu connaître si facilement la limite de $u_n - v - n!!$

Exercice 5 : 127 p 135

$u_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Donc la suite (u_n) oscille entre deux valeurs fixes distinctes. Elle diverge (et est non monotone).

$v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ peut être rendu aussi proche de 0 que l'on veut, pour n suffisamment grand. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (et est non monotone, car ses termes sont positifs et négatifs une fois sur 2).

$w_n = 3 + (-1)^n$ prend alternativement les valeurs 2 et 4. Donc la suite (w_n) oscille entre deux valeurs fixes distinctes. Elle diverge (et est non monotone).