DEVOIR MAISON 3 : CORRECTION

Exercice 1 : n° 48 p 200

On appelle X, Y, Z les variables aléatoires qui calculent le gain du joueur avec respectivement la première, la deuxième et la troisième roue.
On va comparer leur espérance, ie gain moyen espéré de chacune des roues.

– La loi de probabilité de X est :

Valeurs x_i	-1.5	6.5
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$

On a $E(X) = -1.5 \times \frac{10}{12} + 6.5 \times \frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$.
Le jeu est désavantageux pour le joueur.

– La loi de probabilité de Y est :

Valeurs y_i	-1	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{9}{12}$	$\frac{3}{12}$

On a $E(Y) = -1 \times \frac{9}{12} + 3 \times \frac{3}{12} = 0$.
Le jeu est équilibré.

– La loi de probabilité de Z est :

Valeurs z_i	-1	1
$P(Z = z_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

On a $E(Z) = -1 \times \frac{7}{12} \times +1 \times \frac{5}{12} = -\frac{1}{6}$.
Le jeu est désavantageux pour le joueur, autant le celui avec la première roue.

Conclusion : il vaut mieux choisir la roue 2.

Exercice 2 : n° 72 p 205

Partie A :

1. X prend les valeurs 2 et -3.

2.

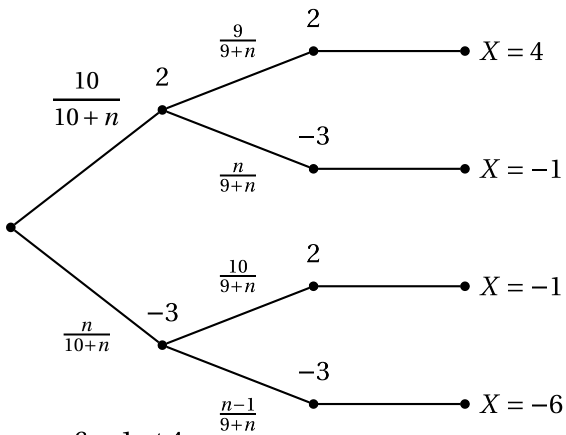
Valeurs x_i	-3	2
$P(X = x_i)$	$\frac{n}{10+n}$	$\frac{10}{10+n}$

3. $E(X) = -3 \times \frac{n}{10+n} + 2 \times \frac{10}{10+n} = \frac{20-3n}{10+n}$

4. Le jeu est défavorable si et seulement si $E(X) < 0$. On étudie donc le signe de $\frac{20-3n}{10+n}$.
   On peut constater que $10+n$ est toujours positif, donc le signe de $\frac{20-3n}{10+n}$ est le même que celui de $20-3n$.
   Or $20-3n < 0 \iff 20 < 3n \iff n > \frac{20}{3} \simeq 6.67$
   Donc le jeu est défavorable à partir de $n = 7$ (pour $n \geq 7$).

Partie B :

1. On peut s'aider d'un arbre pour répondre à la question.



Donc X peut prendre les valeurs -6, -1 et 4.

2.

Valeurs x_i	-6	-1	4
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$	$\dfrac{20n}{(10+n)(9+n)}$	$\dfrac{90}{(10+n)(9+n)}$

3. $E(X) = -6 \times \dfrac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)} - 1 \times \dfrac{20n}{(10+n)(9+n)} + 4 \times \dfrac{90}{(10+n)(9+n)} = \dfrac{-6n(n-1) - 20n + 360}{(10+n)(9+n)}$

$E(X) = \dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)}$

4. Le jeu est défavorable si et seulement si $E(X) < 0$. On étudie donc le signe de $\dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)}$.
On peut constater que $(10+n)(9+n)$ est toujours positif, donc le signe de $E(X)$ est le même que celui du trinôme $-6n^2 - 14n + 360$.
Or $\Delta = (-14)^2 - 4 \times (-6) \times 360 = 8836 = 94^2$.

Donc $n_1 = \dfrac{14 - 94}{-12} = \dfrac{20}{3}$ (même valeur critique que précédemment) et $n_2 = \dfrac{14 + 94}{-12} < 0$ (impossible).

On a alors que $\dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)} < 0$ pour $n \geq 7$. Donc le jeu est défavorable à partir de $n = 7$.

Exercice 3 :

1. On peut s'aider d'un arbre pour répondre à la question, mais comme il tient compte de l'ordre, il faut diviser le nombre d'issues trouvées par 2.
L'arbre a $4 \times 3 = 12$ branches, puisqu'il y a 4 choix possibles pour le premier carambar, et 3 pour le second (on en a déjà choisit 1). Donc il y a 6 manières de choisir 2 carambars parmi les 4.

2. On fait un arbre « imaginaire ». Il possède $n \times (n-1)$ branches. Donc il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ choix possibles.
Remarquons que ce nombre est forcément entier, puisque :
   - soit n est pair, et dans ce cas $\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n}{2} \times (n-1)$ est entier.
   - soit n est impair, et dans ce cas, $(n-1)$ est pair, donc $\dfrac{n(n-1)}{2} = n \times \dfrac{n-1}{2}$ est entier.

3. Il y a 30 élèves dans cette classe et $\dfrac{30 \times 29}{2} = 435$

   Il y a donc 435 manières possibles de choisir 2 délégués parmi les élèves de votre classe.