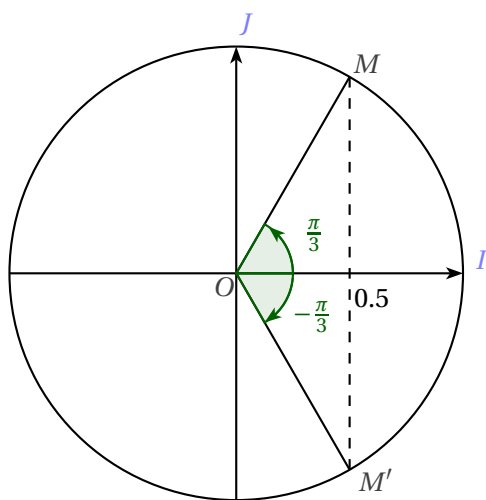


DEVOIR MAISON 5 : ACTIVITÉ DE TRIGONOMÉTRIE ET SUR LES SUITES

Exercice 1 : Equations trigonométriques

Partie A : Equation $\cos x = a$

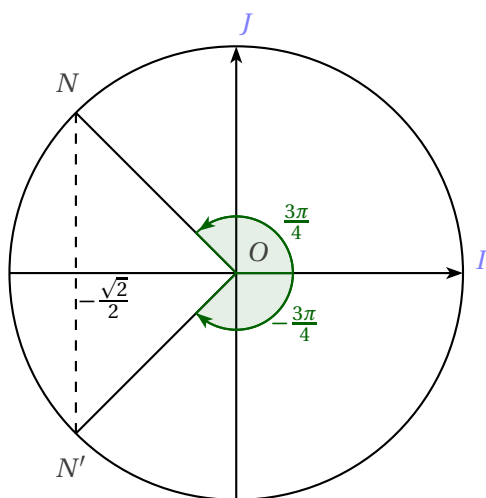
1. a.



b. D'après le tableau des valeurs remarquables, on a $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{3}$, et d'après la configuration du rectangle, on a $(\vec{OI}; \vec{OM}') = -\frac{\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions dans $] -\pi; \pi]$ de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$.

c. Dans $\mathbb{R}$, tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{3} + \text{« un multiple de } 2\pi \text{ »}$ ou $-\frac{\pi}{3} + \text{« un multiple de } 2\pi \text{ »}$ sont aussi solutions de cette équation. L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. a.



On place sur le cercle les points N et N' d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait grâce au tableau de valeurs et à la configuration du rectangle que $(\vec{OI}; \vec{ON}) = \frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{OI}; \vec{ON}') = -\frac{3\pi}{4}$.

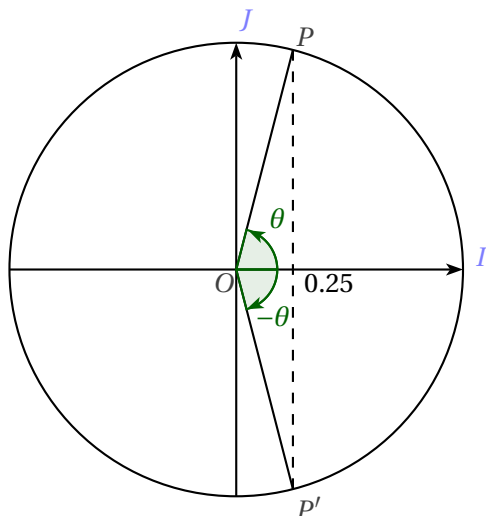
On trouve donc que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\left\{ \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b. Dans $[0; 2\pi[$, on trouve donc deux solutions, à savoir $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.

3. a. Pour tout x on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc ces deux équations n'ont pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

b. L'équation $\cos(x) = a$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \in [-1; 1]$.

4. a.

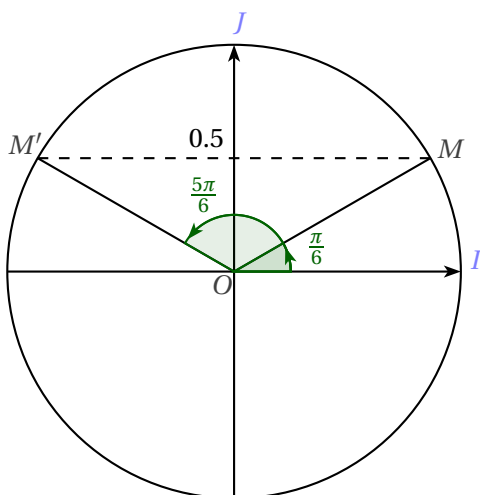


On appelle P et P' les images des solutions de l'équation, ie les points du cercle d'abscisses 0.25.

b. Les solutions de l'équation $\cos x = 0.25$ sur $\mathbb{R}$ sont les nombres de la forme $\pm\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c. Dans $[0; 2\pi]$, les solutions sont θ et $-\theta + 2\pi$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\theta \simeq 1.3181$ rad et $-\theta + 2\pi \simeq 4.9651$ rad.

Partie B : Equation $\sin x = a$



On place les points M et M' d'ordonnée 0.5 sur le cercle trigonométrique.

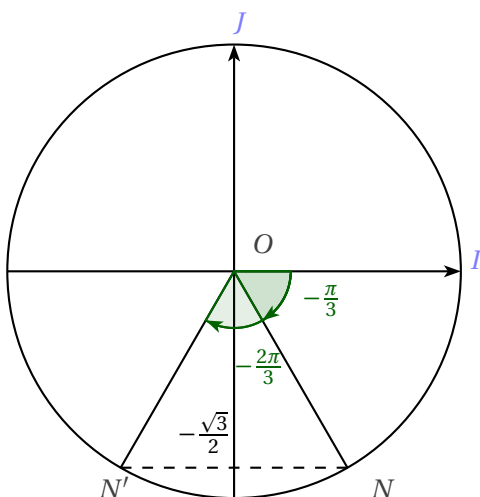
D'après le tableau des valeurs remarquables on sait que $(\vec{OI}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{6}$, et d'après la configuration du

rectangle, on a $(\vec{OI}; \vec{OM}') = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ est donc $\left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$.

L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$.

1.



On place les points N et N' d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

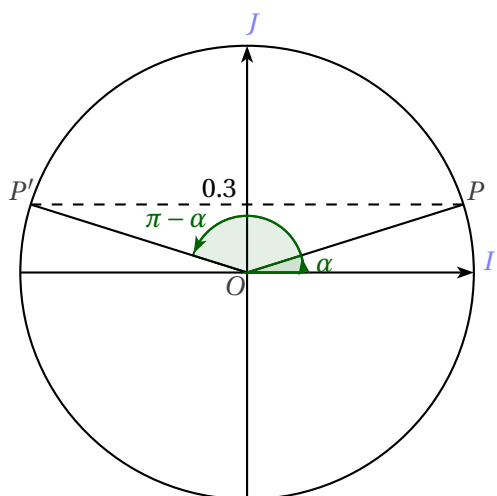
D'après la configuration du rectangle, on sait que $(\vec{OI}; \vec{ON}) = -\frac{\pi}{3}$ et $(\vec{OI}; \vec{ON}') = -\frac{2\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$.

L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc $\left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$.

Les solutions de cette équation dans $[0; 2\pi[$ sont donc : $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

2.



On place les points P et P' d'ordonnée 0.3 sur le cercle trigonométrique.

L'ensemble des solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation $\sin x = 0.3$ est donc $\{\alpha; \pi - \alpha\}$.

L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc $\{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k'\pi \text{ avec } k, k' \in \mathbb{Z}\}$.

3.

Exercice 2 : Suite arithmétique

Activité 3 p 101 : Les moines copistes

1. u_1 représente le nombre de manuscrits produits en octobre 1321. L'énoncé nous dit que $u_1 = 231$.
 u_2 représente le nombre de manuscrits produits en novembre 1321. On a donc $u_2 = 231 + 17 = 248$.
 u_3 représente le nombre de manuscrits produits en décembre 1321. Donc $u_3 = 248 + 17 = 265$.
 u_4 représente le nombre de manuscrits produits en janvier 1322. Donc $u_4 = 265 + 17 = 282$.

2. On voit clairement que chaque terme est égal à la somme du précédent et de 17. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + 17$$

3. u_p représente la production au mois de janvier 1323. Or u_4 représente celle de janvier 1322. Donc $p = 4 + 12 = 16$.

Pour avoir u_{16} , on peut bien sûr calculer u_5 à partir de u_4 que l'on connaît déjà, puis u_6 à partir de u_5 , etc ... jusqu'à u_{16} . Mais il est plus judicieux et moins fastidieux de réfléchir avant de calculer (comme toujours d'ailleurs!). On a

$$\begin{aligned}
 u_p = u_{16} &= u_{15} + 17 \\
 &= (u_{14} + 17) + 17 = u_{14} + 17 \times 2 \\
 &= (u_{13} + 17) + 17 \times 2 = u_{13} + 17 \times 3 \\
 &= \dots \dots \dots = \dots \dots \dots \\
 &= \dots \dots \dots = u_4 + 17 \times (16 - 4) \\
 u_{16} &= u_4 + 17 \times 12
 \end{aligned}$$

On trouve donc que $u_p = u_4 + 17 \times (p - 4) = 282 + 17 \times 12 = 486$.

4. On appelle S la production de l'année 1322. On a

$$S = u_4 + u_5 + \dots + u_{15} = \sum_{k=4}^{15} u_k$$

5. On peut faire ce calcul « à la main », tant que nous n'avons pas la formule. Mais on peut encore une fois réfléchir pour éviter les calculs fastidieux.

On constate que chaque u_k de la somme peut se calculer à partir de u_4 que nous connaissons déjà. En

particulier on a :

$$u_5 = u_4 + 17 \times 1$$

$$u_6 = u_4 + 17 \times 2$$

$$u_7 = u_4 + 17 \times 3$$

.....

$$u_{15} = u_4 + 17 \times 11$$

En ajoutant membre à membre les onze égalités ainsi que u_4 , on trouve :

$$S = \sum_{k=4}^{15} u_k = u_4 + 11 \times u_4 + 17 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11) = 12 \times u_4 + 17 \sum_{k=1}^{11} k$$

Par un calcul astucieux on trouve sans difficulté

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = (1 + 11) + (2 + 10) + (3 + 9) + \dots + (5 + 7) + 6 = 5 \times 12 + 6 = 60 + 6 = 66$$

Donc au final on a $S = 12 \times 282 + 17 \times 66 = 3384 + 1122 = 4506$.

L'abbaye a produit 4506 manuscrits en l'an 1322.



Exercice 3 : Suite récurrente et explicite

Activité 4 p 101 : Suite Logique

1. Après quelques tests basiques, on constate que

$$\begin{aligned} v_1 &= 2v_0 - 1 ; & v_2 &= 2v_1 - 1 \\ v_3 &= 2v_2 - 1 ; & v_4 &= 2v_3 - 1 \end{aligned}$$

Donc je propose $v_5 = 2v_4 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$

2. De même je propose $v_6 = 2v_5 - 1 = 2 \times 33 - 1 = 65$

Et $v_7 = 2v_6 - 1 = 2 \times 65 - 1 = 129$ et $v_8 = 2v_7 - 1 = 2 \times 129 - 1 = 257$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

4. Il est alors clair que f est définie sur $\mathbb{N}$ par $f(x) = 2x - 1$.

5. On constate que les valeurs des v_n sont très proches des puissances de 2.

En effet, on a

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + 1 = 2^0 + 1 ; & v_1 &= 2 + 1 = 2^1 + 1 \\ v_2 &= 4 + 1 = 2^2 + 1 ; & v_3 &= 8 + 1 = 2^3 + 1 \\ v_4 &= 16 + 1 = 2^4 + 1 ; & v_5 &= 32 + 1 = 2^5 + 1 \\ v_6 &= 64 + 1 = 2^6 + 1 ; & v_7 &= 128 + 1 = 2^7 + 1 \end{aligned}$$

On conjecture donc :

$$v_n = 2^n + 1$$

6. On a donc $v_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.

Il est alors clair que la fonction g est définie sur $\mathbb{N}$ par $g(x) = 2^{x+1} + 1$