Nom : .... **Prénom :** .... Classe :.....

INTERROGATION N° 3

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(t^2-5)(t^2+6t+14)=0$

Solution :

$$\mathscr{S}=\left\{\sqrt{5};-\sqrt{5};-3+i\sqrt{5}:-3+i\sqrt{5}\right\}$$

Exercice 2 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z=\sqrt{3}+i$; $\overline{z}$; $-z$; $-\overline{z}$; $\dfrac{1}{z}$

Solution :

$|z|=\sqrt{3+1}=2$ et donc $z=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$|\overline{z}|=|z|$ et $\arg(\overline{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\overline{z}=2\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)$.

$|-z|=|z|$ et $\arg(-z)=\arg(-1)+\arg(z)=\pi+\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $-z=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

$|-\overline{z}|=|z|$ et $\arg(-\overline{z})=\pi+\arg(\overline{z})=\pi-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $-\overline{z}=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{|1|}{|z|}=\dfrac{1}{|z|}$ et $\arg(\dfrac{1}{z})=\arg(1)-\arg(z)=-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 : ROC

Soient $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

- Démontrer qu'on a l'égalité : $z\overline{z}=|z|^2$.
- En déduire que $|zz'|=|z|\times|z'|$

Solution :

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2=|z|^2$$

$$\begin{aligned}
|zz'|^2 &= zz'\times\overline{zz'} && \text{d'après ce qui précède}\\
&= zz'\times\overline{z}\overline{z'} && \text{d'après les propriétés du conjugués}\\
&= z\times\overline{z}\times z'\times\overline{z'} && \text{d'après la commutativité de la multiplication dans } \mathbb{C}\\
&= |z|^2\times|z'|^2 && \text{d'après ce qui précède}
\end{aligned}$$

Or un module est toujours positif, donc $|zz|^2=|z|^2\times|z'|^2 \Longleftrightarrow |zz'|=|z|\times|z'|$. *CDFD*

Nom : .... **Prénom :** .... Classe :......

INTERROGATION N° 3

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(4z^2-4z+101)(z^2+1)=0$

Solution :

$$\mathscr{S}=\left\{i;-i;\frac{1}{2}+5i:\frac{1}{2}-5i\right\}$$

Exercice 2 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z=-2\sqrt{3}+2i$; $\overline{z}$; $-z$; $-\overline{z}$; $\dfrac{1}{z}$

Solution :

$|z|=\sqrt{4\times3+4}=4$ et donc $z=4\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}+1\dfrac{2}{4}\right)=4\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+1\dfrac{1}{2}\right)=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$|\overline{z}|=|z|$ et $\arg(\overline{z})=-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\overline{z}=4\left(\cos\dfrac{-5\pi}{6}+i\sin\dfrac{-5\pi}{6}\right)$.

$|-z|=|z|$ et $\arg(-z)=\arg(-1)+\arg(z)=\pi+\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $-z=4\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)$.

$|-\overline{z}|=|z|$ et $\arg(-\overline{z})=\pi+\arg(\overline{z})=\pi-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $-\overline{z}=4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{|1|}{|z|}=\dfrac{1}{|z|}$ et $\arg(\dfrac{1}{z})=\arg(1)-\arg(z)=-\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{-5\pi}{6}+i\sin\dfrac{-5\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 : ROC

Soient $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux nombres complexes écrits sous leur forme algébrique.

- Démontrer qu'on a l'égalité : $z\overline{z}=|z|^2$.
- En déduire que $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

Solution :

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2=|z|^2$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{z}{z'}\right|^2 &= \frac{z}{z'}\times\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} && \text{d'après ce qui précède}\\ &= \frac{z}{z'}\times\frac{\overline{z}}{\overline{z'}} && \text{d'après les propriétés du conjugués}\\ &= \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}}=\frac{|z|^2}{|z'|^2} && \text{d'après ce qui précède}\end{aligned}$$

Or un module est toujours positif, donc $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^2=\dfrac{|z|^2}{|z'|^2}\iff\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$. *CDFD*