TSVT1 TSVT2 TSSI		lundi 10 janvier 2011

Contrôle commun n° 2

<u>Exercice n° 1:</u> Commun à tous les élèves (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=3+4\,i$.
Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C=2\sqrt{3}+i\,(-2-\sqrt{3})$ et $z_D=-2\sqrt{3}+i\,(-2+\sqrt{3})$.
L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. a) Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D.

   b) En déduire que les points B et D sont sur un cercle C de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$
   a) Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2\,i$.
   b) Montrer que le point F est le milieu du segment $[CD]$.
   c) Montrer que $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}=-i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C-z_F}{z_A-z_F}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment $[CD]$.
3. Proposer une méthode de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

<u>Exercice n° 2:</u> Commun à tous les élèves (5 points)

1. Dans cette question, on demande à l'élève d'exposer des connaissances.
   On suppose connu le résultat suivant :
   La fonction $x\to e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi'=\varphi$, et $\varphi(0)=1$.
   Soit a un réel donné.
   a) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y'=ay$.
   b) Soit g une solution de l'équation $y'=ay$.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=g(x)\,e^{-ax}$.
   Montrer que h est une fonction constante.
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'=ay$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$.

   a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_0(x)=a\cos x+b\sin x$$
   soit une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'=2y$.
   c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-f_0$ est solution de (E_0).
   d) En déduire les solutions de (E).
   e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

<u>Exercice n° 3:</u> Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=-1$, $u_1=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2}=u_{n+1}-\left(\frac{1}{4}\right)u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n.$$
   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   d) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :
$$w_n=\frac{u_n}{v_n}.$$
   a) Calculer w_0.
   b) En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1}=w_n+2$.
   d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\cdot\cdot\cdot+u_n$.
   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $S_n=\frac{2-(2n+3)}{2^n}$

.

<u>Exercice n° 4:</u> Pour les élèves de TSVT2 et TSSI (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\,e^x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x)=x\left(1+\frac{1}{e^x-1}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$ et démontrer que f est continue en 0.
3. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x\geqslant x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x=0$.
   b) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^2}$.
   c) Donner le tableau des variations de f .
4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\,;f(x))$ et $M'(-x\,;f(-x))$ de la courbe C .
   a) Établir que $f(-x)=\frac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM′).
   b) On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

<u>Exercice n° 3:</u> Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=-1$, $u_1=\frac{1}{2}$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+2}=u_{n+1}-\left(\frac{1}{4}\right)u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$.
   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   d) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n=\frac{u_n}{v_n}$.
   a) Calculer w_0.
   b) En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1}=w_n+2$.
   d) Exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\cdot\cdot\cdot+u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:
   $$S_n=\frac{2-(2n+3)}{2^n}$$

<u>Exercice n° 4:</u> Pour les élèves de TSVT1 (6 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Recherche de primitives

1. Donner toutes les primitives de chacune des fonctions suivantes :
   $$f(x)=3x^4-5x+1+\frac{1}{x^2} \qquad g(x)=(2x-1)(x^2-x+5)^3$$
2. Donner la primitive H de la fonction h suivante, telle que H(0)=1 et $h(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

Partie B : Etude de fonction

On considère la foncion F définie par $F(x)=\frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x\in\left]-\infty-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

On étudie C_f sa répsentation graphique dans un repère du plan.

1. Etudier les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.
2. La courbe C_f admet-elle une asymptote verticale ? Horizontale ? Si oui, préciser leur équation.
3. Calculer la dérivée F' de la fonction F .
4. Dresser le tableau de variations de la fonction F sur son ensemble de définition.
5. En déduire le nombre de solutions de l'équation $F(x)=\sqrt{2}$.
6. On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{5}{(2x+1)^2}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

   Déterminer la primitive de G de g vérifiant $G(2)=1$.