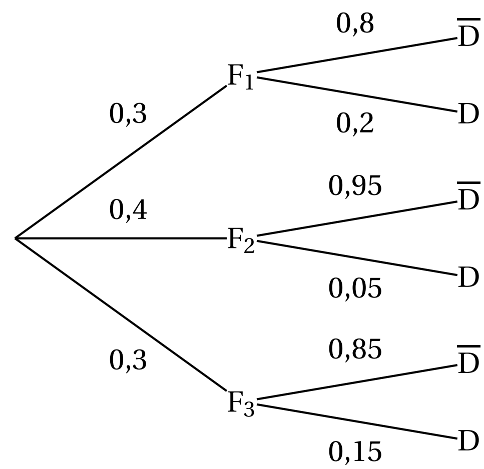
CORRECTION DM : $\mathbb{C}$, PROBAS, ÉQUA DIFF, INTÉGRALES ET SUITES

Ce qui est en italique a été rajouté pour vous préparer davantage au DS ...

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** F_1 désigne l'événement : « le pneu provient du fournisseur 1 ».
D désigne l'événement : « le pneu présente un défaut ».
On a l'arbre suivant :



D'après le théorème des probabilités totales :
$p\left(\overline{D}\right) = p\left(F_1 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_2 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_3 \cap \overline{D}\right)$ soit
$p\left(\overline{D}\right) = 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,24 + 0,38 + 0,255 = 0,875.$

b. On a $p_{\overline{D}}(F_2) = \dfrac{p\left(\overline{D} \cap F_2\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{p(F_2) \times p_{F_2}\left(\overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,95}{0,875} = \dfrac{0,38}{0,875} \approx 0,434.$

2. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de pneus sans défaut. Alors Y suit une loi binomiale de probabilité $0,875$ avec $n = 10$, puisque les expériences sont indépendantes.

a. La probabilité cherchée est donc égale à :
$p(Y = 9) = \binom{10}{9} \times 0.875^9 \times 0.125^1 = 10 \times 0.875^9 \times 0.125 \simeq 0.376$

b. On cherche la probabilité qu'il y ait 0 ou 1 pneu avec défaut, soit, 9 ou 10 pneus sans défaut :

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 9) &= p(Y = 9) + p(Y = 10) \\
&= \begin{pmatrix}10\\9\end{pmatrix} \times 0,875^9 \times 0,125^1 + \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix} \times 0,875^{10} \times 0,125^0 \\
&= 10 \times 0,875^9 \times 0,125 + 0,875^{10} \approx 0,639
\end{aligned}$$

c. On cherche n tel que $p(\mathrm{Y} \geqslant 1) \geqslant 0.999$. Pour cela, on résout :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{Y} \geqslant 1) \geqslant 0.999 &\iff 1 - p(\mathrm{Y} = 0) \geq 0.999 \\ &\iff 1 - \binom{n}{0} \times 0.875^0 \times 0.125^n \geq 0.999 \\ &\iff 1 - 0.125^n \geq 0.999 \\ &\iff 0.001 \geq 0.125^n \\ &\iff \ln(0.001) \geq n \ln(0.125) \\ &\iff \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.125)} \leq n \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0.001)}{\ln(0.125)} \simeq 3.3$ donc le réparateur doit choisir au moins 4 pneus.

3. **a.** On a $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x - \int_0^{500} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \int_{500}^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000}$
$= -\mathrm{e}^{-1000\lambda} - \left(-\mathrm{e}^{-500\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.

b. On a donc $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \dfrac{1}{4} \iff \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda} = \dfrac{1}{4}$.
On pose $x = \mathrm{e}^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit alors

$$x - x^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

(on pouvait aussi utiliser le Δ pour résoudre cette équation).
Il reste à résoudre : $\mathrm{e}^{-500\lambda} = \dfrac{1}{2}$.
Or : $\mathrm{e}^{-500\lambda} = \dfrac{1}{2} \iff -500\lambda = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff -500\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{500} \approx 0{,}001\,38 \approx 0{,}001\,4$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. $z_{\mathrm{E}'} = \dfrac{1}{2}\left(-\mathrm{i} + \dfrac{1}{-\mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\mathrm{i} + \dfrac{1 \times \mathrm{i}}{-\mathrm{i} \times \mathrm{i}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\mathrm{i} + \dfrac{\mathrm{i}}{1}\right) = 0$.
E a donc pour image O.

2. $M' = M \iff z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \iff 2z = z + \dfrac{1}{z} \iff z = \dfrac{1}{z} \iff z^2 = 1 \text{ et } z \neq 0 \iff z = 1 \text{ ou } z = -1$.
Les points égaux à leur image sont donc les points d'affixe 1 et -1.

3. Soit $M(z)$ avec $z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq -1$.

a. $z' + 1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 1 = \dfrac{z^2 + 1 + 2z}{2z} = \dfrac{(z+1)^2}{2z}$
$z' - 1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1 = \dfrac{z^2 + 1 + 2z}{2z} = \dfrac{(z-1)^2}{2z}$.
Donc $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{(z+1)^2}{2z} \times \dfrac{2z}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. On traduit les longueurs en termes de module :
$\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = \dfrac{|z'+1|}{|z'-1|} = \left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right|$ d'après la question précédente.
Donc $\dfrac{M'\mathrm{B}}{M'\mathrm{A}} = \left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^2 = \left(\dfrac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2 = \left(\dfrac{M\mathrm{B}}{M\mathrm{A}}\right)^2$.

On traduit les angles en termes d'argument :
$\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{A}M'}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right) = \arg\left(\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right) \quad [2\pi]$ d'après la question différente.
Donc $\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = 2\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = 2\left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{B}M}\right) = 2\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) \quad [2\pi]$

4. a. **Un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si il est à égale distance des extrémités de ce segment.** Donc
$M \in \Delta \iff M\text{A} = M\text{B} \iff \dfrac{M\text{B}}{M\text{A}} = 1.$
D'après la question précédente, comme les distances sont positives, on a :

$$M \in \Delta \iff \frac{M'\text{B}}{M'\text{A}} = 1 \iff M'\text{B} = M'\text{A} \iff M' \in \Delta.$$

b. • Si M appartient au cercle de diamètre [AB] et $M \neq \text{A}$ et $M \neq \text{B}$, alors $\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$. (On doit considérer les cas où $M = A$ et $M = B$ à part, car sinon l'angle considéré n'existe pas ...)
Donc d'après la question précédente $\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = \pi \quad [2\pi]$, et les points A, B et M' sont alignés ou encore $M' \in (\text{AB})$. On peut même préciser que $M' \in]\text{AB}[$.
• Si $M = \text{A}$ alors $M' = \text{A}$ d'après la question 2.
De même si $M = \text{B}$ alors $M' = \text{B}$.

Finalement, dans tous les cas : si M appartient à Γ, alors $M' \in (\text{AB})$.

c. Inversement, tout point M' de (AB) a une affixe réelle α. M' a au moins un antécédent d'affixe $z \neq 0$ par f si, et seulement si :

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \alpha \iff 2\alpha z = z^2 + 1 \iff z^2 - 2\alpha z + 1 = 0.$$

Comme $\Delta = 4\alpha^2 - 4$ cette équation admet au moins une solution complexe, non nulle.
Conclusion : tout point de (AB) a au moins un antécédent par f.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\,;\,b]$.
Pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x) \iff g(x) - f(x) \geqslant 0$
Donc $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\,\text{d}x \geqslant 0$ d'après le deuxième résultat donné.
De plus d'après le premier résultat, on a : $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\,\text{d}x = \int_a^b g(x)\,\text{d}x - \int_a^b f(x)\,\text{d}x.$
Finalement on a $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\text{d}x - \int_a^b f(x)\,\text{d}x \geqslant 0 \iff \int_a^b g(x)\,\text{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\text{d}x.$ CQFD

Partie B

1. a. Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f_1(x) = \ln(1+x)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x=+\infty$;
On pose $X=1+x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$.

b. f_1 est la composée de deux fonctions :
$x\longmapsto 1+x$ continue et dérivable sur $[0~;~+\infty[$, à valeurs dans $[1~;~+\infty[$ et
$x\longmapsto \ln x$, continue et dérivable sur $[1~;~+\infty[$,
donc f_1 est continue et dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
On a $f_1'(x)=\dfrac{1}{x+1}$
Donc pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f_1'(x)>0$ et f_1 est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

c. $I_1=\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. On ne sait pas primitiver ln, donc on est contraint de choisir :

$u(x)=x \qquad \mathbf{u'(x)=1}$

$\mathbf{v(x)=\ln(1+x)} \qquad v'(x)=\dfrac{1}{x+1}$

u et v sont continues et dérivables sur $[0~;~+\infty[$, de même que u' et v' donc

$$I_1=\left[u(x)v(x)\right]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\left[x\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1=\ln(2)-0-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$I_1=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2-\left(1-\ln(2)-(0-0)\right)=2\ln(2)-1$$

$I_1=\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ et f_1 est continue sur $[0~;~1]$ donc I_1 est l'aire algébrique (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=0$, $x=1$ et la courbe représentative de f_1.

2. a. $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout x de $[0~;~1]$ on a :

$$\begin{array}{ll} & 0\leqslant x^n\leqslant 1\\ \Longleftrightarrow & 1\leqslant 1+x^n\leqslant 2\\ \Longleftrightarrow & \ln 1\leqslant \ln\left(1+x^n\right)\leqslant \ln 2 \text{ car la fonction ln est strictement croissante sur }]0~;~+\infty[\\ \Longleftrightarrow & 0\leq f_n(x)\leq \ln(2)\end{array}$$

Comme la fonction f_n est continue sur $[0~;~1]$ (comme composée de fonctions continues) et que pour tout x de $[0~;~1]$, on a $0\leqslant f_n(x)\leqslant \ln 2$,

on en déduit que pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant I_n\leqslant\int_0^1 \ln 2\,\mathrm{d}x$

Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln 2\,\mathrm{d}x=\left[\ln(2)x\right]_0^1=\ln(2)$. Donc : $0\leqslant I_n\leqslant \ln 2$.

b. $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^{n+1}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\ln\left(1+x^{n+1}\right)-\ln\left(1+x^n\right)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)\mathrm{d}$

Or, pour tout x de $[0\,;\,1]$ on a

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \iff & 0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \text{ (en multipliant par } x^n \geq 0) \\ \iff & 1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n \end{array}$$

Donc $\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \leq 1 \iff \ln\left(\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) \leq 0 \iff \displaystyle\int_0^1 \ln\left(\dfrac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) \mathrm{d}x \leq 0 \iff I_{n+1} - I_n \leq 0$

Donc $I_{n+1} \leqslant I_n$ et la suite (I_n) est décroissante.

c. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente vers un nombre positif.

3. **a.** g est la différence de deux fonctions continues dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ donc g est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$.

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	0	$-$	
Variations de g	0	$\searrow$	

Donc g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. D'après le tableau précédent, on voit clairement que g est strictement négative sur $]0\,;\,+\infty[$ et $g(0) = 0$.

Si $x \geq 0$ alors pour tout entier naturel n non nul, $x^n \geq 0$.

D'après ce qui précède on a alors $g\left(x^n\right) \leqslant 0 \iff \ln\left(1 + x^n\right) - x^n \leqslant 0$ soit $\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n$.

c. Les fonctions f_n et $x \longmapsto x^n$ sont continues sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ on a :

$$\begin{array}{rl} & 0 \leqslant \ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n \\ \iff & \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ \iff & 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ \iff & 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ d'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 4 : MODÈLE DE VERHULST - LOI LOGISTIQUE CONTINUE **5 points**

1. $z = \dfrac{1}{f}$ donc $z' = -\dfrac{f'}{f^2}$. Et donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$(\mathrm{E}_2)\quad \left\{\begin{array}{lcl} z'(t) & = & -az(t)+a \\ z(0) & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{f'(t)}{f^2(t)} = -a\dfrac{1}{f(t)} + a \\ \\ \dfrac{1}{f(0)} = 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -f'(t) & = & -af(t)+af^2(t) \\ f(0) & = & 0.1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} -f'(t) & = & af(t)\left(-1+f(t)\right) \\ f(0) & = & 0.1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) & = & -af(t)(-1+f(t)) \\ f(0) & = & 0.1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) & = & af(t)(1-f(t)) \\ f(0) & = & 0.1 \end{array}\right.$$

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -ay + a$ sont les fonctions y de la forme :

$$y(t) = Ke^{-ax} - \frac{a}{-a} = Ke^{-ax} + 1 \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

On en déduit que $z(t) = Ke^{-ax} + 1$. Or $z(0) = 10 \iff K + 1 = 10 \iff K = 9$.
Donc $z(t) = 9e^{-ax} + 1$ et $f(t) = \dfrac{1}{9e^{-ax}+1}$.

3. On sait donc que

$$\begin{aligned} f(15) = 0.19 \quad & \iff \quad \frac{1}{9e^{-15a}+1} = 0.19 \\ & \iff \quad 9e^{-15a} + 1 = \frac{1}{0.19} \\ & \iff \quad 9e^{-15a} = \frac{1}{0.19} - 1 = \frac{0.81}{0.19} = \frac{81}{19} \\ & \iff \quad e^{-15a} = \frac{81}{19} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{19} \\ & \iff \quad -15a = \ln\left(\frac{9}{19}\right) \\ & \iff \quad a = -\frac{1}{15}\ln\left(\frac{9}{19}\right) \simeq 0.05 \end{aligned}$$

4. On sait que $a > 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{9e^{-ax}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Rq : Le signe de a est important pour répondre !

5. On cherche x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 90 &\iff \frac{1}{9e^{-ax}+1} \geq 0.9 \\ &\iff \frac{1}{0.9} \geq 9e^{-ax}+1 \\ &\iff \frac{10}{9} - 1 \geq 9e^{-ax} \\ &\iff \frac{1}{9} \geq 9e^{-ax} \\ &\iff \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \geq e^{-ax} \\ &\iff \frac{1}{81} \geq e^{-ax} \\ &\iff -\ln(81) \geq -ax \\ &\iff \frac{1}{a}\ln(81) \leq x \text{ car } a > 0 \text{ donc } -a < 0 \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{a}\ln(81) \simeq 88.2$.
Donc on trouve que la plante dépassera 90cm au bout de 89 jours.

EXERCICE 5 : QCM À JUSTIFIER ! — 5 points

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. » **FAUX**

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli : on renouvelle 10 fois de manière indépendante une expérience à deux issues consistant à tirer un boule dans une urne contenant 3 boules dont une blanche. La probabilité de tirer une blanche est de $1/3$. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues à l'issue des 10 expériences. X suit une loi binomiale de paramètres $(10;1/3)$. $p(X=3) = \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$ et $\binom{10}{3} \neq 3$.

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. » **VRAI**

Pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[e^{-\lambda t}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$,
$p(X > a) = 1 - p(X \leqslant a) = e^{-\lambda a}$.
L'équation $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est équivalente à :
$1 - e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a} \iff e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \iff -\lambda a = -\ln(2) \iff a = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »**VRAI**

On utilise la forme exponentielle : $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où
$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$
et θ est tel que $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
D'où $z = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et pour tout entier naturel n, $z^n = 2^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}$.
Si n est multiple de 3, il s'écrit sous la forme $3k$ où k est un entier naturel. On obtient alors $z^n = 2^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi} = \pm 2^n \in \mathbb{R}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - \mathrm{i}$ et le point B d'affixe $b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}a$.

Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. » **VRAI**

Soit $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_O - z_B} = \dfrac{a-b}{-b}$.

On sait que $Arg(Z) = (\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$ et que $|Z| = \dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BO}}$.

$b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}(2-\mathrm{i}) = \dfrac{2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}+1}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,

Donc $a - b = 2 - \mathrm{i} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

D'où $Z = \dfrac{1-3\mathrm{i}}{2} \times \dfrac{-2}{3+\mathrm{i}} = -\dfrac{1-3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = -\dfrac{(1-3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{9+1} = -\dfrac{3-\mathrm{i}-9\mathrm{i}-3}{10} = \mathrm{i}$

Z est de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Donc $(\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \dfrac{\pi}{2}$ et BA = BO. Le triangle ABO est donc isocèle rectangle de sommet B.

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. » **FAUX**

Pour tout point M d'affixe z non nulle, on a :
$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(\dfrac{z\overline{z}}{-10}\right) \quad [2\pi]$

Or $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ donc $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = 0 \quad [2\pi]$ et les points O, M et M' sont alignés.