Devoir Maison 10 : $\mathbb{C}$, Probas, équa diff, intégrales et suites

Ce qui est en italique a été rajouté pour vous préparer davantage au DS ...

Exercice 1 **5 points**

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   - **a.** Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   - **b.** Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise de dix pneus.
   - **a.** *Calculer la probabilité qu'exactement neuf pneus choisis soient sans défaut ?*
   - **b.** Quelle est alors la probabilité qu'**au plus** un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.
   - **c.** *Quelle est le nombre minimal de pneus que le réparateur doit choisir pour que la probabilité qu'au moins un pneu choisi ne présente aucun défaut soit supérieure à* 0.999 *?*
3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$
   - **a.** Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.
   - **b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplête, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
     La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

Exercice 2 **5 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

1. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -\text{i}$. Déterminer l'affixe du point E$'$, image de E par f
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$ *(l'ensemble des points* ***invariants*** *par f).*
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
   Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right)$

4. Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

5. Soit Γ le cercle de diamàtre [AB].

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f_1 sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
(Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

b. Etudier les variations de la suite (I_n)

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

a. Etudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

$$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 4 : MODÈLE DE VERHULST - LOI LOGISTIQUE CONTINUE **5 points**

On repique des plants de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $f(t)$ la taille, en m, d'un plant après t jours. On a donc $f(0) = 0.1$.
Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation $f'(t) = af(t)\big(1-f(t)\big)$ où a est une constante dépendant des conditions expérimentales.
Autrement dit, f est une solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' = ay(1-y)$$

1. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   Démontrer que la fonction f satisfait aux conditions (E_1) si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} z'(t) & = & -az(t)+a \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ z(0) & = & 10 \end{array}\right.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -ay + a$ et en déduire l'expression de la fonction z, puis celle de la fonction f.
3. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (arrondir à 10^{-2} près).
4. Etudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.
5. Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

EXERCICE 5 : QCM À JUSTIFIER ! **5 points**

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^7$. »
2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$. »
3. Soit le nombre complexe $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »
4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $a = 2 - \mathrm{i}$ et le point B d'affixe $b = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}a$.
   Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.
   Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »