DEVOIR COMMUN 5 :

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** **[1,5 pt]** Si le dé indique 1, alors la probabilité de gagner est de $\frac{4}{10}$. Donc : $p_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{G}) = \frac{4}{10}$

   Si le dé indique 2, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$. Donc : $p_{\mathrm{D}_2}(\mathrm{G}) = \frac{2}{15}$

   Si le dé indique 3, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}$. Donc : $p_{\mathrm{D}_3}(\mathrm{G}) = \frac{1}{30}$

   b. **[1 pt]** On a

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3) \\ &= p(\mathrm{D}_1) \times p_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{G}) + p(\mathrm{D}_2) \times p_{\mathrm{D}_2}(\mathrm{G}) + p(\mathrm{D}_3) \times p_{\mathrm{D}_3}(\mathrm{G}) \\ p(G) &= \frac{23}{180} \end{aligned}$$

2. **[1 pt]** Un joueur a gagné la partie. Alors la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé est

$$p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}_1) = \frac{p(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{G})}{p(\mathrm{G})} = \frac{12}{23}$$

3. **[1,5 pt]** Un joueur fait six parties. Comme il remet les boules tirées dans l'urne après chaque partie, les parties sont considérées comme indépendantes.
   Appelons X la variable aléatoire désignant le nombre de parties gagnées. Alors, on répète de manière indépendante la même expérience aléatoire (jouer une partie) à deux issues (gagner ou perdre) 6 fois. Donc X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{23}{180}$.
   Ainsi la probabilité qu'il gagne exactement deux parties est :

$$P(X=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{23}{180}\right)^2 \times \left(1 - \frac{23}{180}\right)^4 \approx 0,14$$

   Pour déterminer le nombre minimal de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9, résolvons :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9 &\iff 1 - P(X<1) \geqslant 0,9 \iff 1 - P(X=0) \geqslant 0,9 \\ &\iff 1 - \left(1 - \frac{23}{180}\right)^n \geqslant 0,9 \\ &\iff \left(\frac{157}{180}\right)^n \leqslant 0,1 \\ &\iff n \ln\left(\frac{157}{180}\right) \leqslant \ln(0,1) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \end{aligned}$$

   Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \simeq 16.8$. Ainsi, le nombre minimal cherché est $n = 17$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** **[0,5 pt]** B_1 est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$, donc on a :

$$z_{B_1} = \sqrt{2}(z_B - z_A) + z_B = \sqrt{2}(2-\mathrm{i}) + \mathrm{i} = 2\sqrt{2} + \mathrm{i}(1-\sqrt{2})$$

b. **[0,5 pt]** Comme B' est l'image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$, alors on a :

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - z_A) + z_A = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(2\sqrt{2} + \mathrm{i}(1-\sqrt{2}) - \mathrm{i}) + \mathrm{i} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) + \mathrm{i} \\ &= (2 - \mathrm{i} + 2\mathrm{i} - \mathrm{i}^2) + \mathrm{i} = 3 + 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. **a.** **[0,5 pt]** On a $z'_B = (1+\mathrm{i})z_B + 1 = (1+\mathrm{i}) \times 2 + 1 = 3 + 2\mathrm{i} = z_{B'}$.
Donc l'image de B par la transformation f est bien B'.

b. **[0,5 pt]** Un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si :

$$\begin{aligned} z' = z &\iff (1+\mathrm{i})z + 1 = z \iff z + \mathrm{i}z + 1 = z \\ &\iff \mathrm{i}z = -1 \\ &\iff z = -\frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} \end{aligned}$$

Donc le point A est le seul point invariant par f.

c. **[1.5 pt]** Pour tout nombre complexe distinct de i,

$$\begin{aligned} \frac{z'-z}{\mathrm{i}-z} &= \frac{(1+\mathrm{i})z + 1 - z}{\mathrm{i}-z} = \frac{\mathrm{i}z+1}{\mathrm{i}-z} \times \frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}+z} \\ &= \frac{-z + \mathrm{i}z^2 + \mathrm{i} + z}{\mathrm{i}^2 - z^2} \\ &= \frac{\mathrm{i}z^2 + \mathrm{i}}{-1-z^2} = \frac{\mathrm{i}(z^2+1)}{-(z^2+1)} = -\mathrm{i} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\mathrm{MM}'}{\mathrm{MA}} = \left|\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z}\right| = |-\mathrm{i}| = 1 \iff \mathrm{MM}' = \mathrm{MA}$
Donc M' appartient au cercle de centre M et de rayon AM.
De plus, $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z}\right) = \arg(-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$
Ainsi M' est le point du cercle de centre M et de rayon AM tel que : $\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

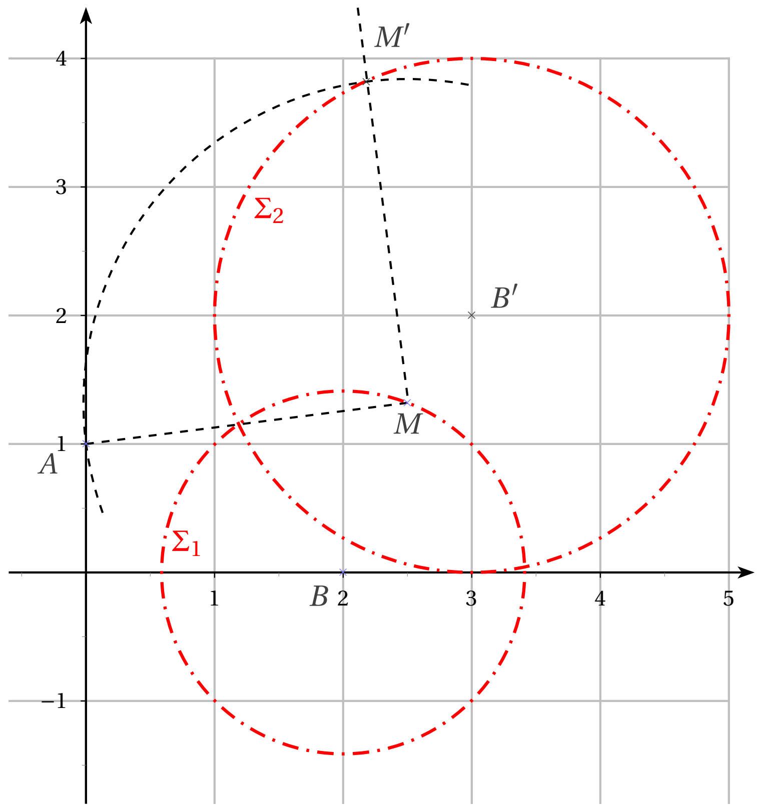
3. **a.** **[0,5 pt]** Comme $|z-2| = \sqrt{2} \iff \mathrm{BM} = \sqrt{2}$, alors l'ensemble Σ_1 des points M d'affixe z vérifiant $|z-2| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

b. **[0,75 pt]** De plus, $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 1 - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})z + 1 - 2(1+\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})(z-2)$
D'où : $|z' - 3 - 2\mathrm{i}| = |(1+\mathrm{i})(z-2)| = |1+\mathrm{i}||z-2| = \sqrt{2}|z-2|$
Donc si M appartient à Σ_1, $|z-2| = \sqrt{2}$ et

$$|z' - 3 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \iff \mathrm{M}'\mathrm{B}' = 2$$

Donc si M appartient à Σ_1, alors M' appartient au cercle de centre B' et de rayon 2.

c. [0,25 pt]



EXERCICE 3 **5 points**

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$

1. **a. [0,5 pt]** f est dérivable sur $[0;+\infty[$, et $f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

   Or sur $[0;+\infty[$, $\ln(x+1) \geqslant 0$ et $\dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.
   Ainsi f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. [0,5 pt] L'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   Comme $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, alors $T_0 : y = 0$, donc c'est l'axe des abscisses.

2. **a. [1 pt]** Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1} &\iff \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}\\ &\iff x^2 = ax^2+(a+b)x+b+c\end{aligned}$$

   Donc $\begin{cases} a=1\\ a+b=0\\ b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=1\end{cases}$ Ainsi pour tout réel $x \neq -1$: $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$

   b. [1 pt] Ainsi

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2} - 1 + \ln(1+1) - (0-0+\ln(1)) = -\frac{1}{2} + \ln 2\end{aligned}$$

3. **[1 pt]** On a $\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Intégrons par parties : $u'(x) = x \qquad u(x) = \dfrac{1}{2}x^2$
$v(x) = \ln(x+1) \qquad v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Donc
$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\mathrm{I}\\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right) = \frac{1}{4}\text{u.a}\end{aligned}$$

Partie B : [1 pt]
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\ln(x+1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) - x^n\ln(x+1)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^n(x-1)\ln(x+1)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Mais sur $[0\,;1]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $\ln(x+1) \geqslant 0$, donc $x^n(x-1)\ln(x+1) \leqslant 0$. Donc

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \left(x^n(x-1)\ln(x+1)\right)\mathrm{d}x \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi la suite u est décroissante, comme de plus, u est minorée par 0 alors la suite u converge.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

1. **[0,5 pt]** $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}} \times \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}-\frac{x}{4}}}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}-\frac{x}{4}}} = \dfrac{3\mathrm{e}^0}{2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}+\mathrm{e}^0} = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$

2. **[0,5 pt]** Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{4} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{1+2\times 0} = 3$.
Par un raisonnement analogue, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3. **[1 pt]** f est de la forme $3\times\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable et f' est de la forme $3\times\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x) = 2\times\left(-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$

$$f'(x) = 3\times\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{3}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} > 0$, alors $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. **a.** **[0,5 pt]** Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = K\mathrm{e}^{\frac{t}{4}} \qquad \text{avec } K \text{ constante réelle.}$$

b. **[0,5 pt]** Comme g est une solution de l'équation différentielle (E_1), alors $g(t) = K\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}$.
Donc $g(0) = K\mathrm{e}^{\frac{0}{4}} = K$ or $g(0) = 1$ donc $K = 1$. Ainsi $g(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{4}}$.

c. **[0,5 pt]** La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois lorsque

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{t}{4}} \geqslant 3 \Longleftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{4}}\right) \geqslant \ln 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{t}{4} \geqslant \ln 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad t \geqslant 4\ln 3 \simeq 4.39 \end{aligned}$$

La population dépassera 300 rongeurs la 5^e année pour la première fois.

2. **a.** **[1 pt]** $h(t) = \dfrac{1}{u(t)}$ sur $\mathbb{R}$, alors $h'(t) = -\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{u(t)} + \frac{1}{12} \\ \frac{1}{u(0)} = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -u'(t) = -\frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{12}u^2(t) \\ u(0) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow (E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Comme nous avons procédé par équivalence, la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3).

b. **[1 pt]** Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions y telles que : $y(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} - \dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$ avec C constante réelle.
Ainsi $h(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \dfrac{1}{3}$.
Or $h(0) = 1$ donc $C\mathrm{e}^{-\frac{0}{4}} + \dfrac{1}{3} = 1 \Longleftrightarrow C = \dfrac{2}{3}$. D'où $h(t) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)$.
Comme $u(t) = \dfrac{1}{h(t)}$ on en déduit $u(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{3}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1\right)} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + 1}$.

c. **[0,5 pt]** Dans ce modèle, la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$ s'approche de 3 (Ce calcul a été effectué dans la partie A).