DEVOIR COMMUN 5 :

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les événements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_3 : « le dé indique 3 »
D_2 : « le dé indique 2 » G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

   Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1. **a.** Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B′ image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
Placer les points A, B et B′.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 1.$$

a. Montrer que B a pour image B′ par f.

b. Montrer que A est le seul point invariant par f (c'est-à-dire tel que $z' = z$).

c. Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{\mathrm{i}-z} = -\mathrm{i}$.
Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles.
En déduire une méthode de construction de M′ à partir de M, pour M distinct de A.

3. **a.** Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$.

b. Démontrer que $z' - 3 - 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(z-2)$.
En déduire que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B′.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

Sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe ($\mathscr{C}$) au point O ?

2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b. En déduire $I = -\dfrac{1}{2} + \ln(2)$.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations
$x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

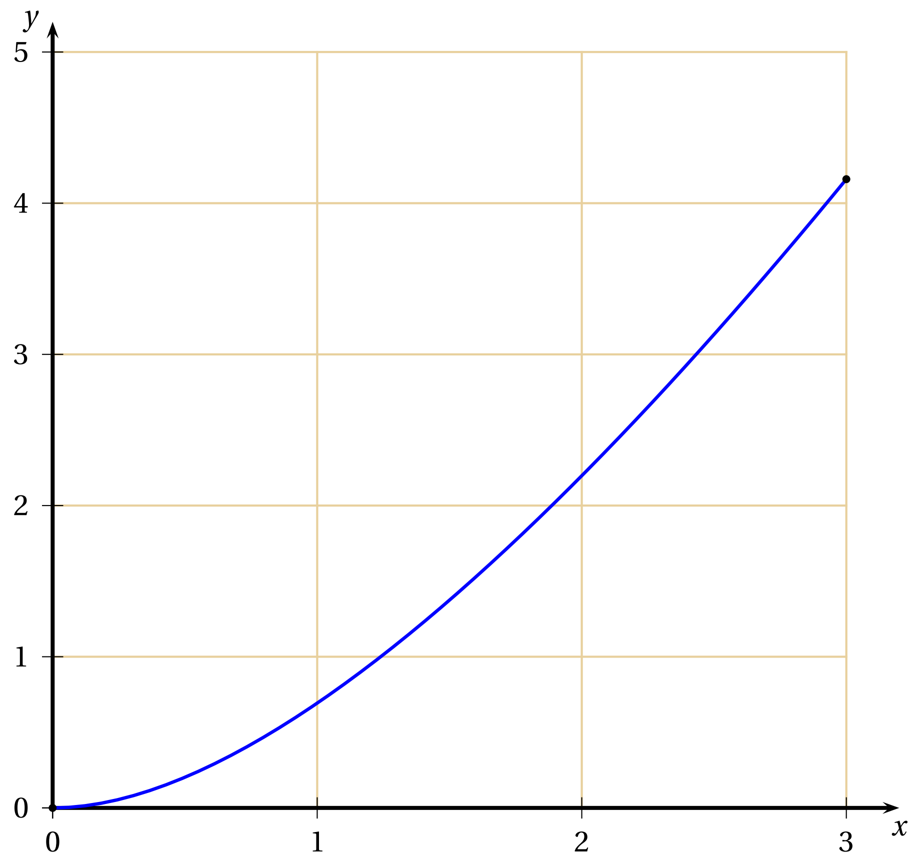
Partie B : Etude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ? *(On ne demande pas de déterminer l'éventuelle limite)*

Annexe

Représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide d'un tableur

Courbe $(\mathscr{C})$



Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2+\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1)\, y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{(u(t))^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{rcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?