DEVOIR SURVEILLÉ 3 :

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Question de cours : il suffit de montrer que le complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et a un argument égal à θ à 2π près.

2. **a.** D'après le résultat précédent si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R on a alors : $z'-(2+2\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}[z-(2+2\text{i})] \iff$
$z' = \left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)[z-(2+2\text{i})]+2+2\text{i} \iff$
$z' = \left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z-(1+\text{i}\sqrt{3})(1+\text{i})+2+2\text{i} \iff \boldsymbol{z' = \left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1+\sqrt{3}+\text{i}\left(1-\sqrt{3}\right)}$ qui est l'écriture complexe de R.

   b. En appliquant cette relation à l'affixe de I, on obtient :
$z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)+\dfrac{\text{i}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

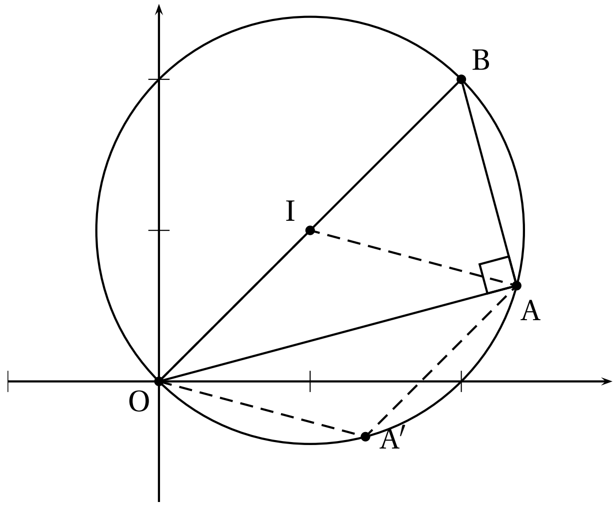
   c. On a $\text{IB}^2 = |1+\text{i}|^2 = 2$; de même $\text{IO}^2 = |1+\text{i}|^2 = 2$.
D'après la définition de la rotation R, le triangle BIA est isocèle d'angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: c'est donc un triangle équilatéral.
Donc $\text{IB} = \text{AB} = \text{IA} = \text{IO} = \sqrt{2}$.
En particulier les points les points O, A et B sont équidistants de I. Ils sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.
On a $1+\text{i} = \dfrac{0+(2+2\text{i})}{2}$, c'est-à-dire que I est le milieu du diamètre [OB]. Le triangle OAB est donc inscrit dans le cercle précédent : il est donc rectangle en A.
Par complément à π, on trouve que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

   d. On a $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \arg(z_{\text{I}}) = \frac{\pi}{4}$.
En appliquant la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)-\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

3. **a.** $\text{A}' = T(\text{A})$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$ est $-1-\text{i}$. On a donc
$z_{\text{A}'} = \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(3-\sqrt{3}\right)-1-\text{i} = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+\dfrac{\text{i}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

   b. On a par définition de la translation $\overrightarrow{\text{IO}} = \overrightarrow{\text{AA}'} \iff \text{OIAA}'$ est un parallélogramme ; de plus d'après 2 c AI = IO ; La quadrilatère OIAA′ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un losange (mais pas un carré car $\left(\overrightarrow{\text{IO}}, \overrightarrow{\text{IA}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.)

   c. On sait que $\left(\overrightarrow{\text{OA}'}, \overrightarrow{\text{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$; en appliquant la relation de Chasles on obtient $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}'}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)-\left(\overrightarrow{\text{OA}'}, \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{12}$.



EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   $f = u - \dfrac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1+x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
   $$f' = u' - \left(\frac{\ln v}{v}\right)' = u' - \frac{\frac{v'}{v} \times v - v' \ln v}{v^2} = u' - \frac{1 - v'\ln v}{v^2}.$$
   Par conséquent, pour tout x de $]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
2. On pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $N'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2+1}{1+x}$. Comme x appartient à $]+1\,;\,+\infty[$, $1+x > 0$. Le numératuer est positif comme somme de nombres strictement positifs. Par conséquent, $N(x) > 0$ pour tout x. On en déduit que N est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   $N(0) = 0$ donc $N(x) < 0$ pour tout x de $]-1\,;\,0[$ et $N(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
   $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2 > 0$ pour tout x.
   Par conséquent, $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,0[$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$, on résout l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$
Comme $f(0) = 0$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B

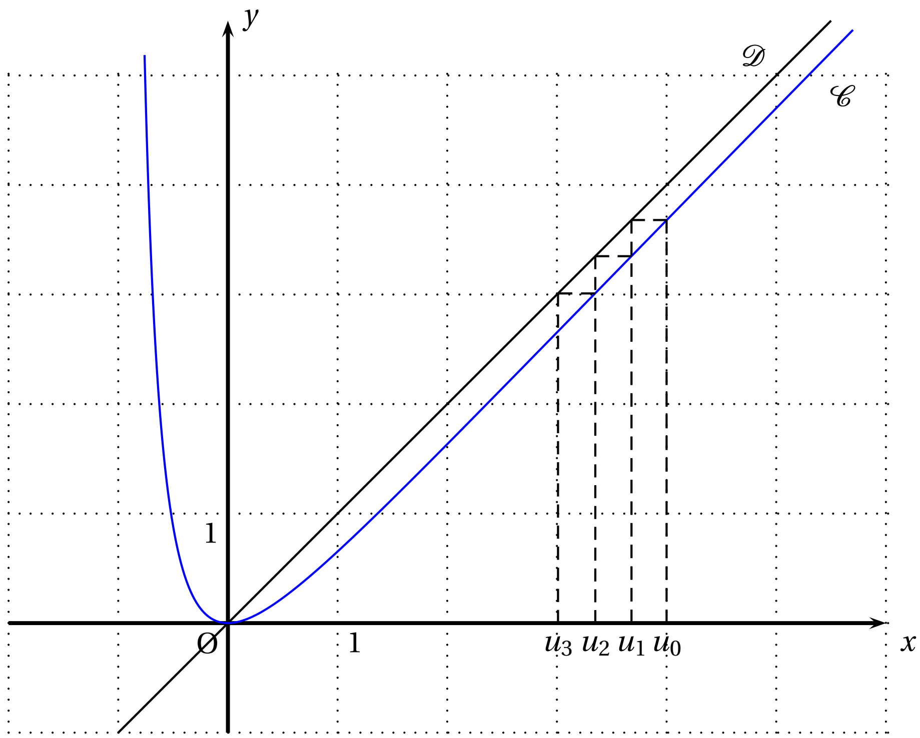
1. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, f est croissante donc pour tout x de $[0\ ;\ 4]$, $0 = f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$; or $f(4) = 4 - \dfrac{\ln 5}{5} < 4$ donc $f(x) \in [0\ ;\ 4$.
2. **a.** Voir courbe.

   b. Montrons par récurrence sur n, que, pour tout n, $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
   - Initialisation : $u_0 = 4 \in [0\ ;\ 4]$ donc c'est vrai au rang 0.
   - Hérédité : supposons que $u_n \in [0\ ;\ 4]$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [0\ ;\ 4]$ d'après 1.

   Par conséquent, $u_n \in [0\ ;\ 4]$ pour tout n.
   - Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} \leqslant 0$ car $1 + u_n \geqslant 1$ d'où $\ln(1+u_n) \geqslant 0$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est décroisssante.

   c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers un réel ell.

   d. Comme f est continue, on sait que ell est solution de l'équation $f(x) = x$. On en déduit que $ell = 0$.



EXERCICE 3 **4 points**

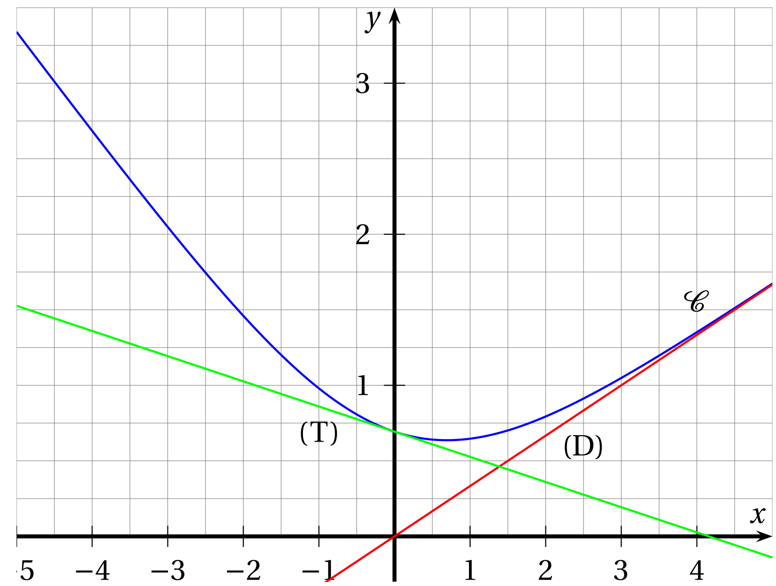
Commun à tous les candidats

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, chacune dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $u'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$, on en déduit : $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$:
   u est donc est une solution de l'équation différentielle (E)
2. On sait d'après le cours que les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = Ke^{-ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On en déduit :
   Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = K\mathrm{e}^{-x}$, où $K \in \mathbb{R}$
3. v est une solution de l'équation différentielle (E)
   $\iff \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) + v(x) = \mathrm{e}{-x}$
   $\iff \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$ *
   $\iff \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - u'(x) + v(x) - v'(x) = 0$
   $\iff \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (v-u)'(x) + (v-u)(x) = 0$
   $\iff \quad v - u$ est une solution de l'équation différentielle (E')
   * car u est une solution de l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$
4. Raisonnons encore par équivalence :

v est une solution de l'équation différentielle (E)
   $\iff \quad v - u$ est une solution de l'équation différentielle (E') d'après Q.3.
   $\iff$ Il existe un réel K tel que, pour tout réel x : $(v-u)(x) = K\mathrm{e}^{-x}$ d'après Q.2.
   $\iff$ Il existe un réel K tel que, pour tout réel x : $v(x) = K\mathrm{e}^{-x} + u(x)$
   Par suite :
   Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par
   $$v(x) = K\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x+K)\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$
5. Soit g une solution de (E) : d'après Q.4, il existe un réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (K+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme : $g(0) = 2 \iff K\mathrm{e}^0 = 2 \iff K = 2$, on en déduit :
   L'unique solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0) = 2$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats



Partie A

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x})=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

   b. Comme $f(x)-\dfrac{1}{3}x=\ln(1+e^{-x})$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$.
   on en déduit que la droite (D) est asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

   c. Comme $f(x)-\dfrac{1}{3}x=\ln(1+e^{-x})$ et que $\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$, on a $1+e^{-x}>1$ et donc $\ln(1+e^{-x})>0$, dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe ($\mathscr{C}$) sur $\mathbb{R}$.

   d. Soit x un réel. On a

   $$f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)+\frac{1}{3}x=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)+\frac{1}{3}x=\ln(e^x+1)-\ln(e^x)+\frac{1}{3}x=\ln(e^x+1)-x+\frac{1}{3}x$$

   soit $f(x)=\ln(e^x+1)-\dfrac{2}{3}x$

   e. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=0$ et comme par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2}{3}x=+\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2. **a.** f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x\longmapsto e^x+1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,où la fonction ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Sa dérivée est : $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3e^x}{3(e^x+1)}-\dfrac{2(e^x+1)}{3(e^x+1)}=\dfrac{3e^x-2(e^x+1)}{3(e^x+1)}=\dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$.

   b. Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $e^x-2>0 \Longleftrightarrow x>\ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;\ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2;+\infty[$.

3. Le coefficient directeur de (T) est donné par $f'(0)$. C'est donc $f'(0)=\dfrac{e^0-2}{3(e^0+1)}=\dfrac{-1}{6}$.