DEVOIR SURVEILLÉ 4 : COMMUN

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega) = \Omega$
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB = |b - a|$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z' - \omega = \text{e}^{\text{i}\theta}(z - \omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_{\text{I}} = 1 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_{A} de A.

c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IO}}$. On pose $\text{A}' = T(\text{A})$.

a. Calculer l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′.

b. Quelle est la nature du quadrilatère OIAA′ ?

c. Montrer que $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{\text{A}'}$.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur l'annexe ci-contre que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

   c. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

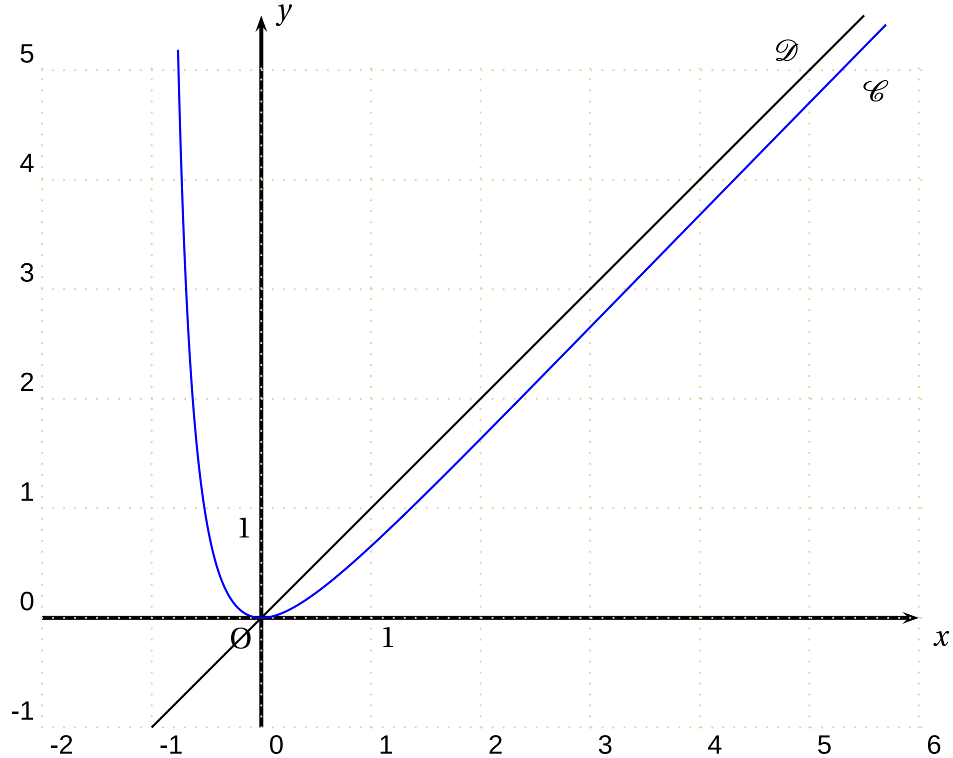
   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

   e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE

A compléter et à rendre avec la copie

Exercice 2



EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E$'$) : $y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E$'$).
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E$'$).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).

c. Etudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1) - \dfrac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3(\mathrm{e}^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

3. On note (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

ANNEXE

A compléter et à rendre avec la copie

Exercice 4