Exercice 1.

PARTIE A.

1. f est solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{2}y + 10$, donc d'après un théorème du cours, il existe une constante k telle que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \frac{10}{-\frac{1}{2}} = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 20.$$

La condition $f(0) = 220$ entraîne alors que $k + 20 = 220$, c'est-à-dire $k = 200$. Finalement :

$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

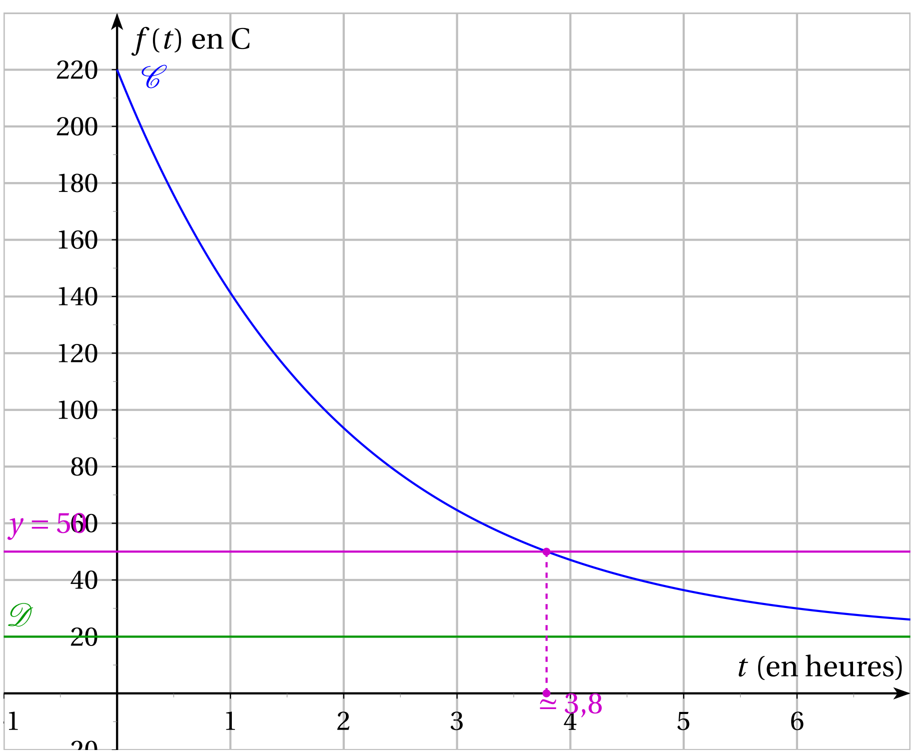
2. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0;$$

la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. On en déduit par opérations que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 20$; ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c. Voir figure.



3. **a.** Graphiquement, $f(t) = 50$ pour $t = 3{,}8$, soit 3 heures et 48 minutes environ.

b. Résolvons :

$$\begin{aligned} f(t)=50 &\iff 200e^{-\frac{t}{2}}+20=50\\ &\iff 200e^{-\frac{t}{2}}=30\\ &\iff \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=\frac{3}{20}\\ &\iff -\frac{t}{2}=\ln\left(\frac{3}{20}\right)\\ &\iff t=-2\ln\left(\frac{3}{20}\right)\simeq 3{,}79\ 0{,}01\ \text{prs} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

PARTIE B.

1. **a.** A l'aide de la calculatrice, au dixième près : $d_0 \simeq 78,7$, $d_1 \simeq 47,7$, $d_2 \simeq 28,9$.

b. $d_n = 200e^{-\frac{n}{2}}+20-200e^{-\frac{n+1}{2}}-20 = 200\left(e^{-\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n+1}{2}}\right)$
Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}}=0$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}d_n=0$$

2. On détermine à partir de quel entier naturel n on a $d_n \leqslant 5$.

$$\begin{aligned} d_n\leqslant 5 &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}-200\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}}\leqslant 5\\ &\iff 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\leqslant 5\\ &\iff 40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\leqslant \mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\\ &\iff \ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\leqslant\frac{n}{2}\\ &\iff 2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\leqslant n \end{aligned}$$

et comme $2\ln\left[40\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right]\simeq 5,5$ (au dixième près), la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de la température est inférieur 5 C est donc $n=6$.
Remarque : on pouvait aussi démontrer que la suite (d_n) est décroissante, puis calculer d_5 et d_6 et conclure.