

DEVOIR MAISON 1 : LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

(5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c .

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C . On rappelle que $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) [2\pi]$.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) [2\pi]$.

Partie B Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe $1 + i$. On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{z - 1 - i}{z}$$

Le point M' est appelé le point image du point M .

1.
 - a. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B' , image du point B d'affixe i .
 - b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel?

Exercice 2.

(5 points)

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\bar{z}(z - 2)}{\bar{z} - 2}.$$

1.
 - a. Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $(1 + i)$.
 - b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
 - c. Etablir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $z' = z$).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3.
 - a. Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $(z - 2)(\bar{z} - 2)$ est réel.
 - b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2 , $\frac{z' + 2}{z - 2}$ est réel.
 - c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB) . Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit M un point distinct de A . Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f . Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3 - 2i$.