# DEVOIR MAISON 1 : LES NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1.** (5 points)

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

*Montrer que* $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$.

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{u};\overrightarrow{AC}) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$$

**Partie B** $A(1+i)$ *et* $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$

1. **a.** *Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point $B'$, image du point $B$ d'affixe $i$.*

$$z_{B'} = \frac{i-1-i}{i} = \frac{-1}{i} = \frac{-i}{i^2} = i$$

**b.** *Montrer que, pour tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle, l'affixe $z'$ du point $M'$ est telle que $z' \neq 1$.*
Supposons que $z' = 1$, alors on a $\dfrac{z-1-i}{z} = 1 \iff z-1-i = z \iff -1-i = 0$ ce qui est absurde.
Donc l'affixe $z'$ du point $M'$ est telle que $z' \neq 1$.

2. *Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est telle que $|z'| = 1$.*

$$|z'| = 1 \iff |\frac{z-1-i}{z}| = 1 \iff \frac{|z-1-i|}{|z|} = 1 \iff |z-1-i| = |z| \iff |z-z_A| = |z|$$

Donc l'ensemble cherché est celui des points à égale distance de $A$ et $O$, ie la médiatrice de $[AO]$.

3. *Quel est l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est un nombre réel ?*

$$\begin{aligned}\frac{z-1-i}{z} \in \mathbb{R} &\iff \arg\left(\frac{z-1-i}{z}\right) = 0\ [\pi]\\ &\iff \arg\left(\frac{z-z_A}{z}\right) = 0\ [\pi]\\ &\iff \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AM}\right) = 0\ [\pi]\\ &\iff O,\ A \text{ et } M \text{ sont alignés}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble cherché est la droite $(AO)$ privé de $O$, car $z \neq 0$.

**Exercice 2.** (5 points)

$A(2)$ et $B(-2)$ *et* $z' = \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}$.

1. **a.** *Déterminer l'affixe du point $P'$ image par $f$ du point $P$ d'affixe $(1+i)$.*

$$\begin{aligned} z_{P'} &= \frac{\overline{z_P}(z_P-2)}{\overline{z_P}-2} = \frac{(1-i)(1+i-2)}{1-i-2} = \frac{(1-i)(-1+i)}{-1-i} = \frac{(1-i)(-1+i)^2}{(-1-i)(-1+i)}\\ &= \frac{(1-i)(1-2i-1)}{2} = -i(1-i) = -i-1 = -1-i = -z_P\end{aligned}$$

**b.** *Montrer que les droites $(AP)$ et $(BP')$ sont parallèles.*
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AP}$ est $z_{\overrightarrow{AP}} = z_P - z_A = 1+i-2 = -1+i$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BP'}$ est $z_{\overrightarrow{BP'}} = z_B - z_{P'} = -1 - i - (-2) = 1 - i = -z_{\overrightarrow{AP}}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BP'}$ sont colinéaires et les droites $(AP)$ et $(BP')$ sont parallèles.

**c.** *Etablir que les droites $(AP)$ et $(PP')$ sont perpendiculaires.*

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PP'};\overrightarrow{AP}) &= \arg\left(\frac{z_P - z_A}{z_{P'} - z_P}\right) = \arg\left(\frac{-1+i}{-2-2i}\right) = \arg\left(\frac{-1+i}{-2(1+i)}\right)\\ &= \arg(-1+i) - \left[\arg(-2) + \arg(1+i)\right] = \frac{3\pi}{4} - \pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Donc les droites $(AP)$ et $(PP')$ sont perpendiculaires.

**2.** *Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.*

$$z' = z \iff \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \iff \overline{z}(z-2) = z(\overline{z}-2) = z\overline{z} - 2\overline{z} = z\overline{z} - 2z \iff \overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des points est l'axe des réels, privé de $A$, car $\overline{z_A} - 2 = 0$.

**3.** **a.** *Montrer que pour tout nombre complexe $z$, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.*

$$(z-2)\left(\overline{z}-2\right) = z\overline{z} - 2(z+\overline{z}) + 4 = |z|^2 - 2Re(z) + 4 \in \mathbb{R}$$

**b.** *En déduire que pour tout nombre complexe distinct de $2$, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.*

$$\frac{z'+2}{z-2} = \frac{\overline{z}(z-2) + 2(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2} \times \frac{1}{z-2} = \frac{\overline{z}z - 2\overline{z} + 2\overline{z} - 4}{(\overline{z}-2)(z-2)} = \frac{|z|^2 - 4}{(\overline{z}-2)(z-2)} \in \mathbb{R}$$

**c.** *Montrer que les droites $(AM)$ et $(BM')$ sont parallèles.*
Pour $M \neq A$, on a $(\overrightarrow{BM'};\overrightarrow{AM}) = \arg\left(\dfrac{z'+2}{z-2}\right) = 0\ [\pi]$.
Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires et les droites $(AM)$ et $(BM')$ sont parallèles.

**4.** *Soit $M$ un point quelconque non situé sur la droite $(AB)$. Généraliser les résultats de la question **1.c**.*

$$\begin{aligned}\frac{z'-z}{z-z_A} &= \frac{\overline{z}(z-2) - z(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2} \times \frac{1}{z-2} = \frac{\overline{z}z - 2\overline{z} - \overline{z}z + 2\overline{z}}{(\overline{z}-2)(z-2)} \quad \text{cette quantité existe car } M \neq A\\ &= \frac{-2\overline{z} + 2z}{(\overline{z}-2)(z-2)} = \frac{4Im(z)}{(\overline{z}-2)(z-2)} \in i\mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MM'}) = \arg\left(\dfrac{z'-z}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
Les droites $(AM)$ et $(MM')$ sont perpendiculaires.

**5.** *$M \neq A$. Déduire des questions précèdentes une construction du point $M'$ image de $M$ par $f$. Réaliser une figure pour le point $Q$ d'affixe $3-2i$.*
- On trace la parallèle à $(AM)$ passant par $B$ (elle existe car $M \neq A$).
- On trace la perpendiculaire à $(AM)$ passant par $M$ (elle existe car $M \neq A$).
- Le point $M$ est l'intersection des deux droites tracées (il existe car ces droites sont perpendiculaires).

Le faire pour $Q(3-2i)$.