AIDE MÉMOIRE SUR LES SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition 1 :
Une suite u de premier terme u_0 et de raison r est **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier n, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Exemple :
Léa dépose 100€ sur son compte. Tous les ans il ajoute 10€ . Si on note u_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{\text{ième}}$ année. On a :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 10 \end{cases}$$

u est donc une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 100.

Définition 2 :
Une suite u de premier terme u_0 et de raison q est **géométrique** si et seulement si, pour tout entier n, on a

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$$

Exemple :
Max dépose 100€ sur son compte. Tous les ans il gagne 3% de plus. Si on note v_n l'argent disponible sur le compte de Léa au bout de la $n^{ième}$ année, on a :

$$\begin{cases} v_0 = 100 \\ v_{n+1} = v_n \times 1,03 \end{cases}$$

v est donc une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 100.

On considère désormais une suite arithmétique (u_n) de raison r.

Propriété 1 :
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

- Relation entre u_n et u_p :

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

- En particulier :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Exemple :
Au bout de 20 ans, Léa dispose de 300€ sur son compte. En effet $u_n = 100 + 10n$ et donc : $u_{20} = 100 + 10 \times 20 = 300$

On considère désormais une suite géométrique (u_n) de raison q.

Propriété 2 :
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a

- Relation entre u_n et u_p :

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

- En particulier :

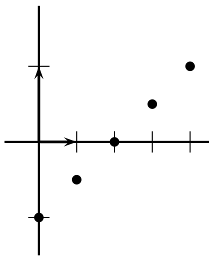
$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

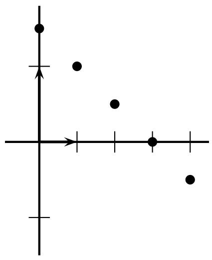
Exemple :
Au bout de 20 ans, Max dispose de $180,61$€ sur son compte. En effet $v_n = 100 \times 1,03^n$ et donc : $v_{20} = 100 \times 1,03^{20} = 180,61$

Représentation graphique dans le plan :
Ce sont les points d'abscisse entière positive de la droite de coefficient directeur r et passant par le point de coordonnées $(n_0; u_{n_0})$

Exemple :

$u_0 = -1$ et $r = 0.5$, $v_0 = 1$ et $r = -0.5$





Théorème 1 :

- Si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante ;
- Si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple :

$r = 10 > 0 \iff$ la suite (u_n) est croissante

Théorème 3 :
La somme S de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme p et de dernier terme d est :

$$\boxed{S = n \times \frac{p+d}{2}}$$

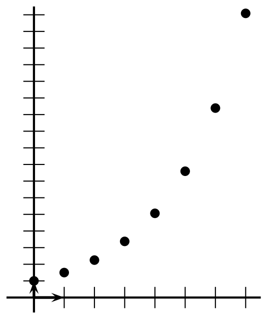
Exemple :

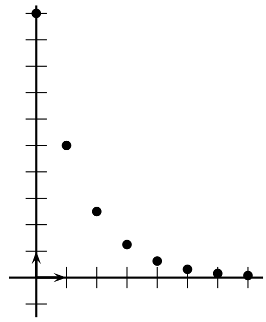
$$u_{10} + u_{11} + ... + u_{20} = 11 \times \frac{u_{10}+u_{20}}{2} = 2200$$

Représentation graphique dans le plan :
Si $q > 0$, ce sont les points d'abscisse entière positive d'une courbe exponentielle.

Exemple :

$u_0 = 1$ et $r = 1.5$, $v_0 = 5$ et $r = 0.5$





Théorème 2 :
Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ (avec $q > 0$) alors :

- Si $q \in [0; 1[$ alors (u_n) est décroissante et convergente vers 0, ie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante égale à 1
- Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante et divergente vers $+\infty$, ie la $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

$q = 1,03 > 1 \iff$ la suite (v_n) est divergente

Théorème 4 :
La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme p est :

$$\boxed{S = p \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Exemple :

$$v_1 + v_2 + ... + v_{20} = v_1 \times \frac{1-1,03^{20}}{1-1,03} = 2767,65$$

Application :

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail. [a]

1^er^ contrat :

Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.

2^ème^ contrat :

Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois juqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (i.e du 36^ème^ mois).
3. Quel est le contrat globablement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

a. Un bail est un contrat de location

Solution **:**

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 200$ tel que $u_{n+1} = u_n + 5$ et la suite (v_n) géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $v_0 = 200$ tel que $v_{n+1} = 1,02 \times v_n$

   Pour le premier contrat le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois sont donnés par u_2 puis u_3 :

   $$u_2 = u_1 + 5 = 200 + 5 = 205€ \qquad u_3 = u_2 + 5 = 205 + 5 = 210€$$

   Pour le deuxième contrat le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois sont donnés par v_2 puis v_3 :

   $$v_2 = v_1 \times 1,02 = 200 \times 1,02 = 204€ \qquad v_3 = v_2 \times 1,02 = 204 \times 1,02 = 208,08€$$

2. Le loyer du dernier mois est donnée par u_{36} pour le premier contrat et v_{36} pour le deuxième contrat :

   $$u_{36} = u_1 + (36-1) \times 5 = 200 + 35 \times 5 = 375€ \qquad v_{36} = v_1 \times 1,02^{35} = 200 \times 1,02^{35} \simeq 400€$$

3. Pour cela il faut calculer la somme des 36 premiers loyers i.e il faut calculer S_1 et S_2 où :

   $$S_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{36} = \frac{36 \times (200+375)}{2} = 18 \times 575 = 10350€$$

   Et

   $$S_2 = v_1 + v_2 + \cdots + v_{36} = 200 \times \frac{1-1,02^{36}}{1-1,02} \simeq 10398€$$

   Au final le premier contrat semble plus avantageux et permettrait de réaliser une économie d'environ 40€

Exercices du livre :

n° 37 + 38 + 39 + 40 p 39