Chapitre 1

Introduction à la théorie des graphes

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait (1937-38, complété en 1960) » et « La chanteuse mélancolique (1955) »

Auteur : Joan Mirò

Présentation succinte de l'auteur : Joan Mirò (1893 - 1983) est un peintre, sculpteur, graveur et céramiste catalan. C'est l'un des principaux représentants du mouvement surréaliste. Son œuvre reflète son attrait pour le subconscient, pour « l'esprit enfantin » , et pour son pays.

À ses débuts, il montre de fortes influences fauvistes, cubistes et expressionnistes, avant d'évoluer vers une peinture plane avec un certain côté naïf. Le tableau intitulé *La ferme* (voir à la fin de ce cours), peint en 1920, est l'une des toiles les plus connues de cette époque.

À Paris, son œuvre devient plus onirique. Dans de nombreux entretiens et écrits des années 1930, Miró manifeste son désir d'abandonner les méthodes conventionnelles de la peinture, pour « les tuer, les assassiner ou les violer » , et favoriser ainsi une forme d'expression contemporaine. Il ne veut aucunement se plier aux exigences ni à l'esthétique de ces méthodes, pas même dans sa démarche vers le surréalisme.

L'un de ses plus grands projets est la création à Barcelone de la « Fondation Miró » en 1975, centre culturel et artistique dévolu à la présentation des nouvelles tendances de l'art contemporain. Elle est initialement alimentée par un important fond offert par le maître.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Ce qui est important, ce n'est pas de finir une oeuvre, mais d'entrevoir qu'elle permette un jour de commencer quelque chose* »

JOAN MIRO

LEÇON 1

Introduction à la théorie des graphes

Le poisson chantant

Un peu d'histoire

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $XVIII^{\text{ème}}$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier (un cavalier peut-il parcourir toutes les cases d'un échiquier une seule fois chacune ?) ou le problème de coloriage de cartes (combien de couleurs suffisent pour colorier une carte géographique de façon à ce que deux pays limitrophes ne soient pas coloriés de la même couleur ?).
La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du $XX^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques.
De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connex- ions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

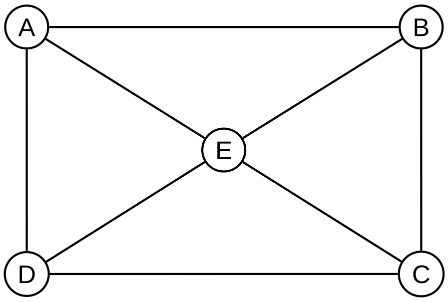
I) Euler et les graphes

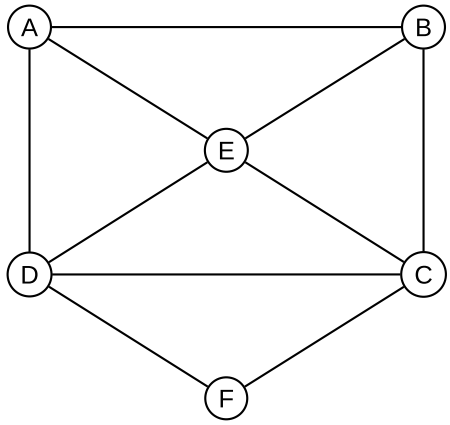
I-1 Exercices de recherche

Travail de l'élève : Les élèves cherchent les 4 problèmes ci-dessous, pendant une heure environ.
Peu à peu se dégage de lui-même le vocabulaire de bases (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents, ...). Les élèves travaillent sans le savoir sur la notion de degré d'un sommet, graphes complets, chaîne et cycle eulérienne, le théorème d'Euler.

Exercice 1 :

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?



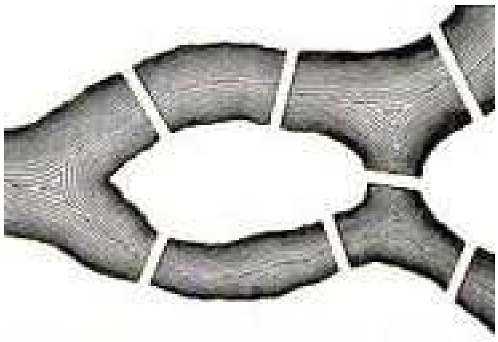


Exercice 2 :

Le nombre de personnes ayant vécu ou qui vivent encore sur la terre et qui ont donnée un nombre impair de poignées de mains est-il pair ou impair ?

Exercice 3 :

Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?



Exercice 4 :

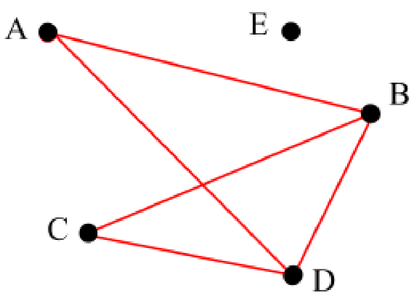
Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour n=2,3,4.

I-2 Généralités

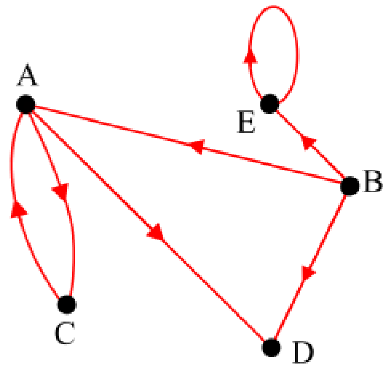
Définition 1 :

- Un **graphe** est un ensemble fini de points et de lignes reliant certains de ces points.
- Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est l'**ordre** du graphe.
- Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. On dit alors que les sommets sont **adjacents**.
  - Une arête reliant un sommet à lui-même est appelée **boucle**.
  - Une arête orientée est appelée **arc** et est représentée par une flèche. On parle alors de **graphe orienté**.
- Le **degré d'un sommet** est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Exemples :



Graphe 1



Graphe 2

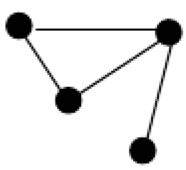
Le graphe 1 est non orienté d'ordre 5 ; les sommets A et B sont adjacents, ce qui n'est pas le cas des sommets A et C ; le sommet E est isolé ; le degré du sommet D est 3.
Le graphe 2 est orienté d'ordre 5. Le sommet E est d'ordre 3.

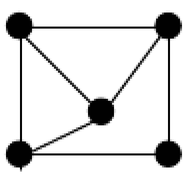
Remarque : Les graphes étudiés dans ce cours seront en général des **graphes simples**, ie sans boucles et tel que entre deux sommets, il y ait au plus une arête. On ne le précisera donc pas.

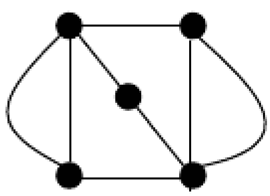
Exercices du livre :

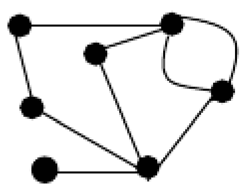
Declic n°$1-3-5-14$

Travail de l'élève : Voici 4 graphes :


N°1


N°2


N°3


N°4

Graphe	1	2	3	4
Nombre d'arêtes				
Somme des degrés				
Nombre de sommets de degrés impair				

Que constate-t-on ?

Propriété 1 :
La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est un nombre pair.

Preuve
Cette somme vaut le double du nombre total d'arêtes, puisque la somme des degrés d'un graphe est en fait le nombre total d'extrémités des arêtes du graphe.

Exemple :
Dans le graphe 2, il y a 7 arêtes. La somme des degrés est $4+3+2+2+3=14$.

Remarque : Un conséquence est que le nombre de sommets de degrés impair est pair.

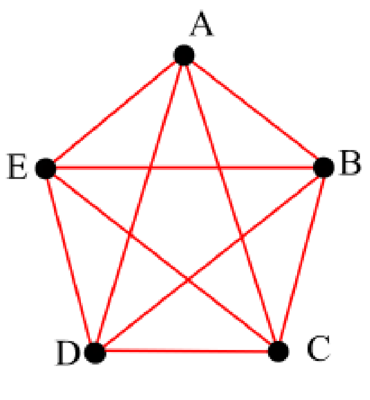
Exemple :
Ceci nous permet de répondre à l'exercice 2 : on représente la situation par un graphe imaginaire, dont les sommets sont les personnes et les arêtes désignent les poignées de mains. Alors nécessairement si le nombre de poignées de mains est impair, cela ne peut avoir lieu que pour un nombre pair de personnes.

Exemple :
Une ligue de football comprend 7 clubs. On décide que chaque club ne jouera que 3 matches chacun. En représentant la situation par un graphe d'ordre 7, où chaque sommet doit être d'ordre 3, on s'aperçoit que cela est impossible. Quel est le plus petit nombre de matches que doit jouer chaque club pour que cela soit possible ?

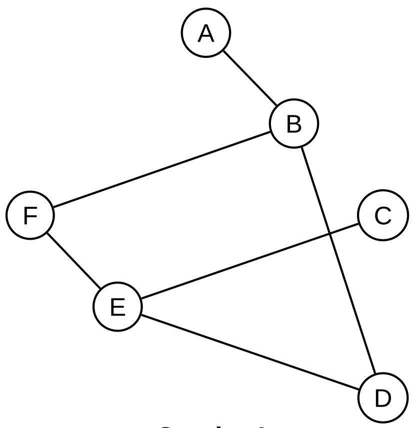
Exercice 5 **:**
Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

Définition 2 :
Un **graphe complet** est un graphe dont tous les sommets sont adjacents 2 à 2.

Exemples :



Graphe 3



Graphe 4

Le graphe 3 est complet mais pas le graphe 4

Remarque : Dans un graphe complet d'ordre n, le degré de chacun des sommets est $n-1$ et que le nombre d'arêtes est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercices du livre :

Declic n°$6-16-17-18-20$ p 240

Exercice 6 **:**

Représenter la situation suivante ci-dessous à l'aide d'un graphe :
Trois pays envoie chacun à une conférence deux espions ; chaque espoins doit espionner tous les espions des autres pays.

Exercice 7 **:**

M. et Mme Euler assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains sont échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. Euler constate que les 7 autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts. Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

I-3 Théorème d'Euler

Définition 3 :

Une **chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout, reliant deux sommets du graphe.
La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
Un graphe est dit **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.
Dans ce cas, la **distance** entre deux sommets d'un graphe est la longueur de la plus petite chaîne les reliant, tandis que le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets du graphe.

Exemples :

Donner des exemples de chaînes dans les graphes 1 et 2.
Le graphe 1 n'est pas connexe, le graphe 2 si.
Dans le graphe 4 :

- Existe-t-il une chaîne de longueur 1 entre les sommets A et B ? *Oui* $(A-B)$
  De longueur 2 ? *Non*
  De longueur 3 ? *Oui* $(A-B-D-B$ ou $A-B-A-B$ ...)
  De longueur 4 ? *Non*
- Quelle est la distance entre les sommets A et D ? *2 car la plus petite chaîne reliant A et D est de longueur 2.*
  Entre les sommets A et E ? *3 car la plus petite chaîne reliant A et D est de longueur 3.*
  Entre les sommets B et C ? *3 car la plus petite chaîne reliant A et D est de longueur 3.*
- Quel est le diamètre de ce graphe ? *4 car la plus grande distance entredeux sommets est celle entre A et C et vaut 4.*

Quel est le diamètre du graphe 3 ? *1 car la distance entre chaque sommet vaut 1.*

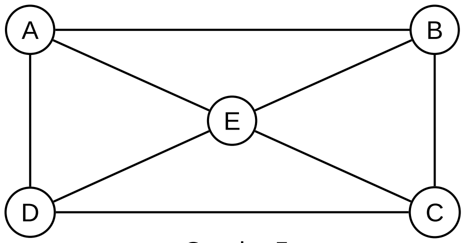
Remarque : Il peut arriver qu'une arête soit prise plusieurs fois.

Exercices du livre :

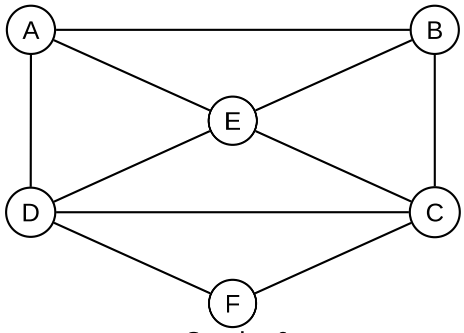
n°$9-11$ p 240 et 5 p 259

Définition 4 :
Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Exemples :
Donner des exemples de chaînes fermées et cycles sur les graphes 5 et 6.



Graphe 5



Graphe 6

Définition 5 :
Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est fermée, on parle de **cycle eulérien**.

Exemples :
Sur les graphes 5 et 6

Théorème 1 : ***Euler***
Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si ce graphe est connexe et le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Preuve
Condition nécessaire pour la chaîne : On considère un sommet qui n'est pas une extrémité. Chaque fois que la chaîne passe par ce sommet, elle l'atteint par une arête et en repart par une autre. Comme chaque arête est utilisée dans la chaîne une fois et une seule, chaque arête incidente à ce somment peut être associée à une autre arête incidente à ce même sommet. Donc tous les sommets sont pairs, sauf éventuellement les deux extrémités.
Condition nécessaire pour le cycle : Un cycle est un cas particulier de la chaîne. Or le cas des extrémités de degré impair est exclu, donc le graphe ne contient pas de sommet impair.

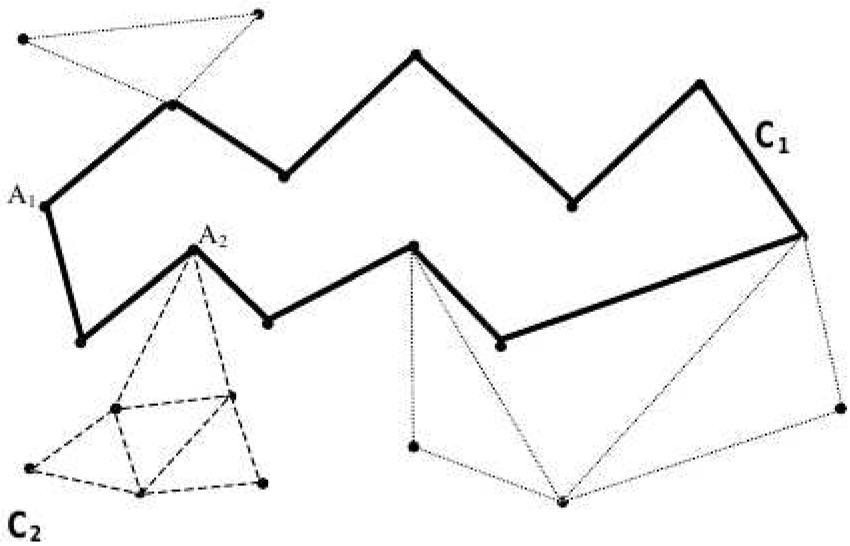
Condition suffisante pour la chaîne : *La partie réciproque du théorème est un peu plus délicate à démontrer. Mais elle présente l'avantage de fournir un procédé de construction d'un cycle eulérien, et à ce titre mérite peut-être d'être exposée aux élèves sur un exemple. De plus, l'utilisation de sous-graphes est efficace pour la résolution de nombreux problèmes, et à ce titre a valeur de méthode.*

Notons tout d'abord que la partie sur la chaîne se déduit de celle sur le cycle aisément : si deux sommets seulement sont de degré impair, on peut les relier provisoirement par une arête et mettre en œuvre un cycle eulérien. Le cycle obtenu sera transformé en simple chaîne par suppression de l'arête rajoutée.

Preuve (Suite)

Soit donc un graphe G dont tous les sommets sont de degré pair. Choisissons un sommet A_1 et une arête incidente à A_1, puis considérons l'autre extrémité de cette arête : ce deuxième sommet étant de degré pair, on peut en repartir par une autre arête, et atteindre un « autre » sommet. Si ce dernier est différent de A_1, on peut en repartir à nouveau (car son degré est pair). Ainsi de suite. Comme le graphe possède un nombre fini d'arêtes, la chaîne ainsi formée se referme tôt ou tard en A_1, formant un cycle C_1.

Ce cycle peut être eulérien (s'il utilise toutes les arêtes du graphe). Dans le cas contraire, chacune des composantes restantes vérifie les hypothèses du théorème : elle est finie, connexe, et ses sommets sont de degré pair. De plus, comme le graphe G est connexe, chacune des composantes restantes peut être relié à un sommet appartenant à C_1.
Choisissons un tel sommet A_2 pour une des composantes restantes : le même procédé de construction développé plus haut permet d'obtenir un nouveau cycle C_2 contenant A_2. On peut l'insérer dans le cycle C_1 au niveau de A_2. L'itération de ce procédé jusqu'à épuisement des arêtes, qui est certain puisque le graphe est fini, permet d'écrire pour G un cycle eulérien.



Remarque : On n'oubliera pas de reprendre les exercices d'introduction.

Exercices du livre :

Declic n°12 – 13 – 14 – 19 p 260 + 46 – 49 p 264

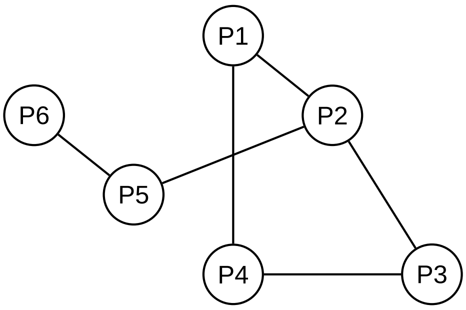
II) Coloriage des sommets d'un graphe

II-1 Exercices de recherche

Travail de l'élève : Laisser les élèves chercher les 3 exercices suivants.

Exercice 8 :

On trouve ci-après le graphe d'incompatibilité de six produits chimiques. Quel est le nombres de wagons nécessaires à leur transport ?

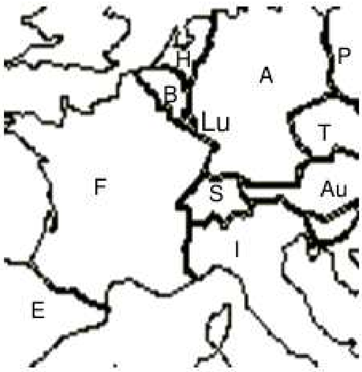


Exercice 9 :

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve. Un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble sans surveillant le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 10 :

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur. Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent. (Deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points communs ne sont pas considérés comme voisins).



II-2 Couleur et graphes

Travail de l'élève : Activité 4 p 250

Définition 6 :

Colorer un graphe consiste à affecter une couleur (une lettre, un nom, une forme ...) à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Exemples :

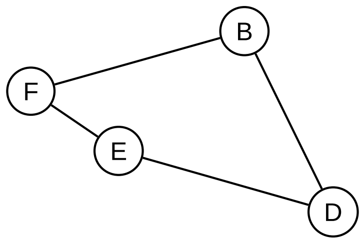
Reproduire le graphe sur les produit chimiques.

Définition 7 :

Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.

Exemple :

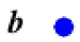
Un sous-graphe du graphe 4 est :



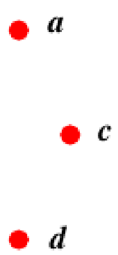
Définition 8 :

Un sous-graphe est stable si ses sommets ne sont reliés par aucune arête.

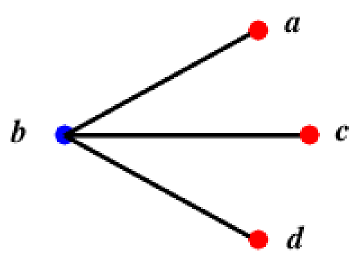
Exemple :



et



sont des sous-graphes stables de



Exercices du livre :

n°8 p 241

Propriété 2 :

Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous- graphes.

Preuve

Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

Travail de l'élève : Activité 6 p 251

Propriété 3 :

Dans un graphe complet d'ordre n, le nombre chromatique K_n est exactement n.

Exemples :

Faire les dessins pour les graphes complets d'ordre 3, 4 et 5.

Propriété 4 : *Conséquence*

Tout graphe qui contient un sous-graphe complet d'ordre n a un nombre chromatique supérieur ou égal à n.

Propriété 5 :

Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$, Δ étant le plus haut degré des sommets.

Preuve

Soit un graphe, et Δ le degré maximum de ses sommets. Donnons nous une palette de $(\Delta + 1)$ couleurs. Pour chaque sommet du graphe on peut tenir le raisonnement suivant : ce sommet est adjacent à Δ sommets au plus, et le nombre de couleurs déjà utilisées pour colorer ces sommets est donc inférieur ou égal à Δ. Il reste donc au moins une couleur non utilisée dans la palette, avec laquelle nous pouvons colorer notre sommet.

Remarque : Il a été démontré que tout graphe planaire (pouvant être déssiné sans que les arêtes ne se croisent) peut être colorier en 4 couleurs *Appel et Haken (1976)*.
Ce problème engendra une littérature considérable pendant près de deux siècles, et contribua largement au développement de la théorie des graphes. Enfin en 1976, une réponse positive fut apportée par deux américains. Pour cela, ils utilisèrent l'informatique, tant le nombre de cas à étudier est grand (1482 configurations). C'est la première fois qu'un théorème était démontré par cette voie.
Aujoud'hui, on a ramené le nombre de configurations à étudier à environ 700, mais la dméonstration requiert toujours un ordinateur.

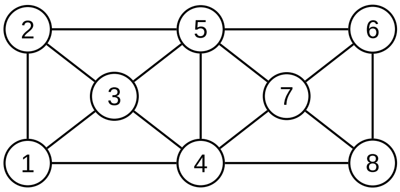
Algorithme de coloration de Welsh et Powell

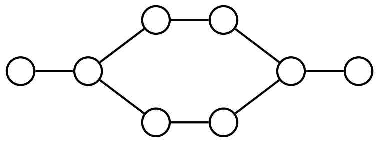
Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

1. Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
   On obtient une liste ordonnée de sommets X_1, X_2, ... X_n tels que :
   $$\text{degré}(X_1) \geq \text{degré}(X_2) \geq \ldots \geq \text{degré}(X_n)$$
2. En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.
3. S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

Exemple :

Appliquer cette méthode aux graphes suivants :





Exercice 11 **:**

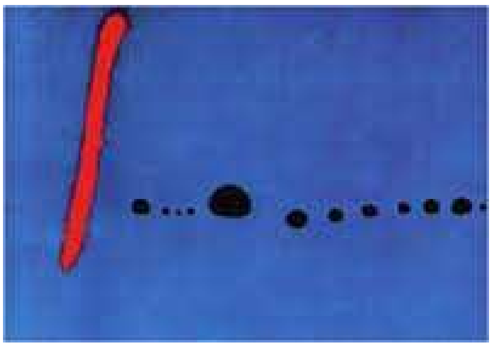
Si un graphe contient une chaîne eulérienne ne passant pas deux fois par le même sommet, que dire du nombre de chromatique ?
Que dire de la réciproque ?

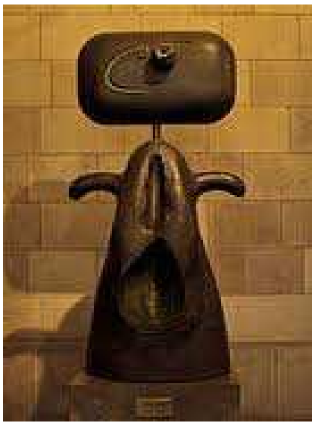
Exercices du livre :

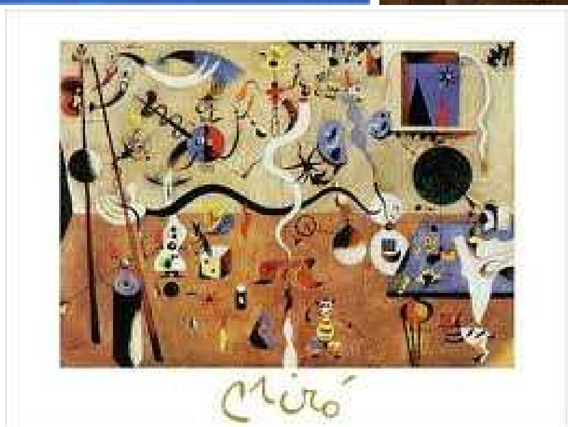
TD 4 p 257 + n°32 – 34 – 40 – 41 – 42 – 44 – 55 p263

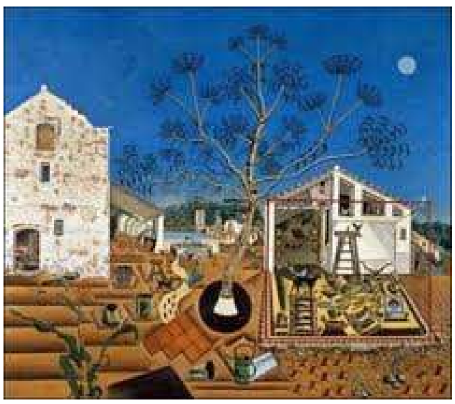
« Humaniser l'esprit : Est-ce l'objet de l'art ? »

MIRO, Joan









Dans l'ordre :

- *Bleu 2* (1961)
- *Le carnaval d'Arlequin* (1924)
- *Femme* (1981)
- *L'oiseau lunaire* (1967)
- *La ferme* (1921-22)