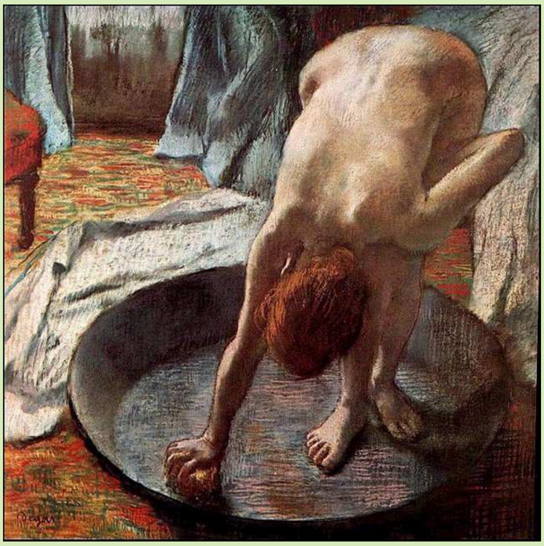
Chapitre 6

Repérage dans le plan et vecteurs

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »
EDGAR DEGAS

Leçon 3

Repérage dans le plan et vecteurs

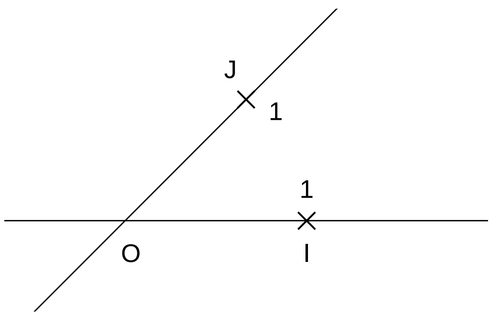
Les planisphères et les cartes géographiques maritimes sont construits dans un repère comprenant l'axe vertical des latitudes et l'axe horizontal des longitudes.
La position d'un bateau par exemple est définie par ses coordonnées sur la cartes, c'est-à-dire la longitude et la latitude.
Lorsque l'on cherche une position sur un plan de ville, on se repère également à l'aide des axes verticaux et horizontaux du plan.
Nous allons donc poser les bases de ce repérage dans le plan.
De plus, nous allons découvrir une nouvelle transformation, et un nouvel outil essentiel, très utilisée notamment en physique : les vecteurs.

I) Repérage dans le plan

I-1 Repère et coordonnées

Définition 1 :
Définir un repère du plan, c'est choisir 3 poitns non alignés, dans un ordre précis : O, I, J.
On note ce repère (O, I, J), et :
- Le point O est l'origine du repère
- La droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I donne l'unité de cet axe
- La droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J donne l'unité de cet axe

Exemple :



Remarques :

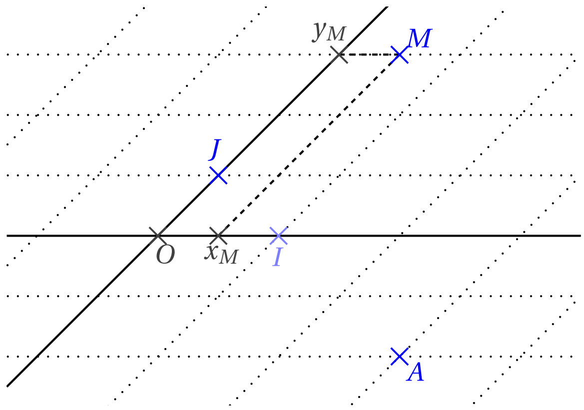
- L'axe des abscisses est souvent horizontal, mais ce n'est pas une obligation
- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère (O, I, J) est dit orthogonal. Les axes du repères sont perpendiculaires.
- Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, le repère $(O; I; J)$ est dit orthonormé. Les axes du repère sont perpendiculaires et ont la même unité.

Définition 2 :

On considère un repère (O, I, J) du plan et un point M quelconque.

- En traçant la parallèle à (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'abscisse x_M du point M.
- En traçant la parallèle à (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'ordonnée y_M du point M.
- Le couple de réels $(x_M; y_M)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).

Exemple :



Le point M a pour coordonées $(\dots,\dots)$ et le point A a pour coordonnées $(\dots;\dots)$

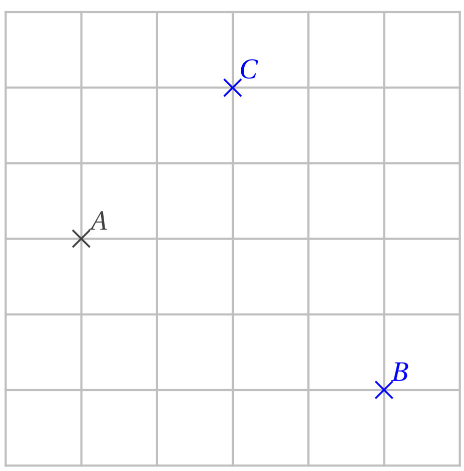
Exercices du livre :

n° 3-30 p 160

I-2 Distance dans un repère orthonormé.

Travail de l'élève **1.**

1. Calculer les distance AB, AC et BC en prenant comme unité le côté d'un carreau du quadrillage.
2. On choisit un repère orthonormé (A, I, J) d'origine A tel que $B(4; -2)$.
   - **a.** Placer le repère (A, I, J) sur la figure.
   - **b.** Comparer AB et $x_B^2 + y_B^2$.
   - **c.** Vérifier que l'on a une relation analogue avec le point C.
3. Conjecturer une relation entre la distance BC et les coordonnées des points B et C.



Propriété 1 :
On considère un repère orthonormé (O, I, J) du plan et les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

l'unité de longueur étant celle commune aux deux axes.

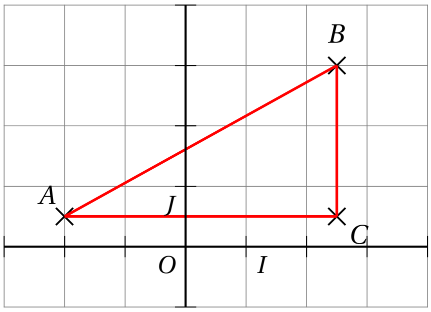
Preuve
On suppose que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$. *Les autres cas se traitent de même.*
On note C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.
Dans le triangle ABC rectangle en C, on a d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, ie :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Comme AB est positif on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple :

$A(-2; 0.5)$ et $B(2.5; 3)$



$$AB = \sqrt{(2.5 - (-2))^2 + (3 - 0.5)^2} = \sqrt{4.5^2 + 2.5^2} = \sqrt{26.5} \simeq 5.1$$

Exercices du livre :
n° 15-20-21 p 161

I-3 Milieu d'un segment

Travail de l'élève **2.** Au vidéo-projecteur, sur géogébra, créer un 4 curseurs a, b, c et d prenant des valeurs entières comprises entre -5 et 5.
Créer les points $A(a, b)$, $B(c, d)$ puis le milieu du segment $[AB]$.

1. En utilisant les curseurs et en observant les coordonnées des points A, B et C dans la fenêtre « algèbre » , compléter le tableau de valeurs suivant :

A	$(4;2)$	$(-3;1)$	$(0;5)$	$(1;-3)$	$(3;0)$	$(-5;4)$	$(2;-2)$	$(1;1)$
B	$(2;0)$	$(-5;-1)$	$(1;-3)$	$(3;-1)$	$(-4;2)$	$(0;0)$	$(-2;2)$	$(-3;5)$
C								

2. Conjecturer des relations entre les coordonnées du milieu du segment et celles de ses extrémités.

3. **Définition 3 :**

Si x et y sont deux nombres réels, la moyenne arithmétique de x et y est le réel $\dfrac{x+y}{2}$.

Enoncer la conjecture précédente en utilisant la notion de moyenne arithmétique de deux nombres.

Propriété 2 :

On considère dans le plan muni d'un repère (O, I, J) les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Preuve

1^{er} **cas** : Si $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$

On suppose par exemple que $y_A = y_B$ et $x_B > x_A$. Alors :

$$\begin{aligned} M(x_M; y_M) \text{ est le milieu de } [AB] &\iff y_M = y_A = y_B \text{ et } x_B - x_M = x_M - x_A \\ &\iff y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \text{ et } x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \end{aligned}$$

La démonstration se traite de même si $x_B < x_A$ ou $x_B = x_A$.

2^{eme} **cas** : Si $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$

On pose C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.

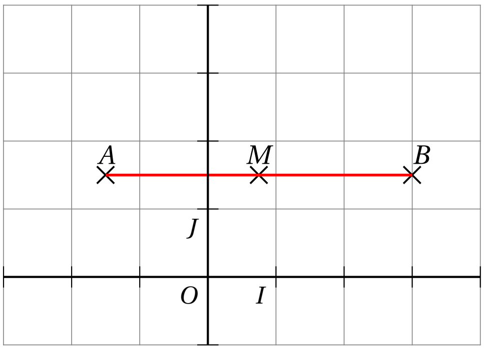
Soit K le milieu de $[AC]$. D'après le théorème des milieux, la droite (MK) est parallèle à (BC).

Donc $x_M = x_K = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{x_A+x_B}{2}$ d'après la partie 1.

De même, on pose L milieu de $[BC]$. On a $y_M = y_L = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{y_A+y_B}{2}$

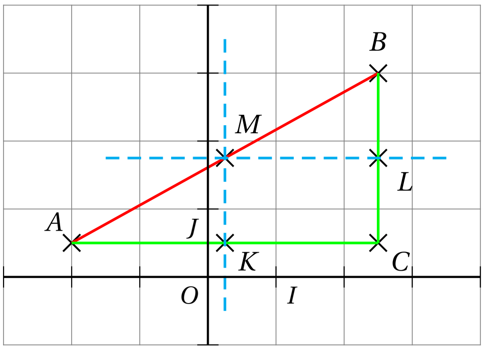
Exemples :

$A(-1.5; 1.5)$ et $B(3; 1.5)$



$M(0.75; 1.5)$

$A(-2; 0.5)$ et $B(2.5; 3)$



$M(0.25; 1.75)$

Exercices du livre :

n° 7-8-9-11-13 p 160

II) Translation et vecteurs

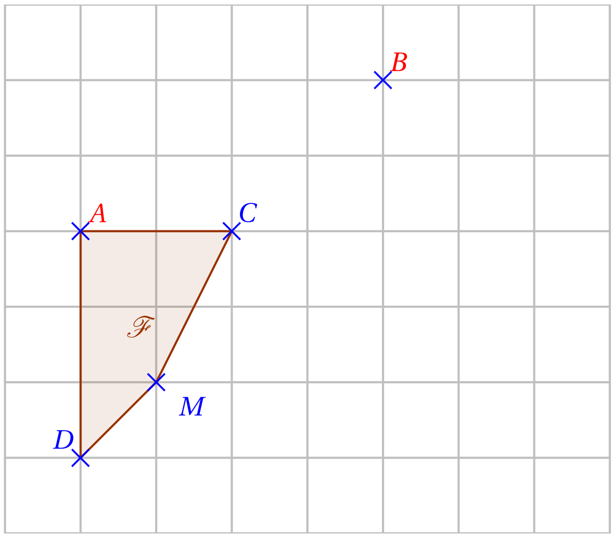
II-1 Découverte d'une transformation : la translation

Travail de l'élève **3.** On veut déplacer la figure $\mathscr{F}$ représentée ci-contre en s'appuyant sur les points A et B et suivant l'algorithme suivant :

Algorithme
Pour transformer un point P en un point Q (ou encore construire l'image Q du point P) il faut :

– Construire le milieu I du segment $[BP]$;

– Construire Q le symétrique du point A par rapport à I.



1. **a.** Construire l'image M' du point M par cet algorithme.
   b. Construire l'image du point A par cet algorithme.
   c. Que constatez-vous ?

Remarque
On a « transformé » le point M en un point M', en suivant un algorithme qui transforme A en B.
La transformation décrite par l'algorithme s'appelle la **translation qui transforme** A **en** B.

2. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABM'M$? Le démontrer.
   b. En utilisant la constatation précédente, construire l'image C' du point C par la translation qui transforme A en B.

Remarque
La translation qui transforme A en B transforme le point M en le point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme.
Attention ! L'ordre des lettres est important !

3. **a.** Représenter par une flèche le chemin rectiligne entre M et son image par la translation qui transforme A en B.
   b. Faire de même pour C, puis pour A.
   c. Conjecturer alors un algorithme plus simple pour construire l'image Q d'un point P par la translation qui transforme A en B.

Remarques

On symbolise le chemin rectiligne qui va de A vers B par un objet mathématique appelé **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, représenté par une flèche de A vers B.
On peut décrire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le chemin qu'il représente en utilisant le quadrillage.
On appelle également **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$, la translation qui transforme A en B.
On peut retenir que cette transformation revient à déplacer les points du même chemin que celui rectiligne qui va de A vers B.

4. **a.** En s'aidant de cette caractérisation, transformer D en D' par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Conjecturer l'image $\mathscr{F}$ de $\mathscr{F}'$ par la translation de vecter $\overrightarrow{AB}$.

Remarque

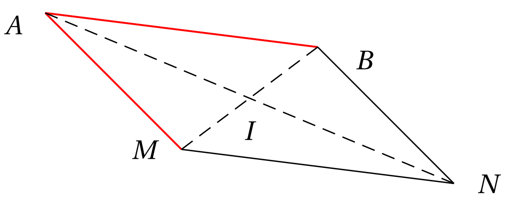
La translation conserve les longueurs, l'alignement et les angles.

Définition 4 : *Translation*

Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est la transformation qui associe à tout point M du plan l'unique point N tel que les segments $[BM]$ et $[AN]$ ont le même milieu.
Autrement dit, il s'agit de l'unique point N tel que le quadrilatère $ABNM$ soit un parallélogramme.

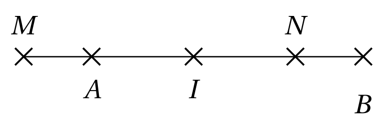
Exemples :

A, B, et M non alignés :



$[BM]$ et $[AN]$ ont même milieu I
$ABNM$ est un parallélogramme

A, B, et M alignés :



$[BM]$ et $[AN]$ ont même milieu I
$ABNM$ est un parallélogramme aplati

Remarques :

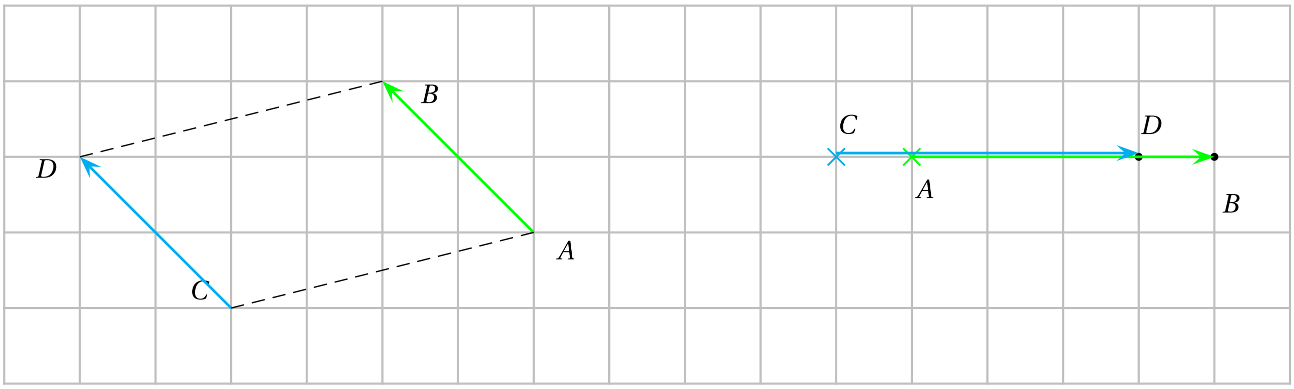
- L'ordre des lettres est essentiel.
- Si les points A, B et M sont alignés, le parallélogramme $ABNM$ est aplati.

Définition 5 : *Translation de vecteur*

On associe à la translation qui transforme A en B le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, qui symbolise le déplacement rectiligne de A vers B.
On appellera désormais cette transformation la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$. On notera $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Exemples :

A, B, et C non alignés A, B, et C alignés



$ABDC$ est un parallélogramme $ABDC$ est un parallélogramme aplati

Remarques :

- Le mot vecteur vient du latin « vector », dérivé du verbe « vehere », qui signifie transporter. Un vector désigne donc un véhicule, par exemple à l'époque un chariot.
- Si les points A et B sont confondus, tout point M est confondu avec son image par la translation. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et on note $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Exercices du livre :

n° 1-2 p 204

II-2 Caractérisation des vecteurs

Travail de l'élève **4.**

On donne les points $A(3,-1)$, $B(0,2)$, $C(-2,-2)$ et $D(2,1)$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Placer ces points dans un repère orthonormé (O, I, J).

2. **a.** Placer F, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

b. Donner la nature du quadrilatère $ADFC$.

c. Placer G, l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

d. En déduire un parallélogramme.

3. **a.** Placer H, l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$.

b. Que constatez-vous ?

c. Placer K, l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.

d. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CK}$.

4. **a.** Lire le coefficient directeur des droites (AD), (CF), (BG) et (CK).

b. Calculer les longueurs AD, CF, BG et CK.

Propriété 3 : *Egalité de vecteurs*

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si

$\iff$ D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\iff$ $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu

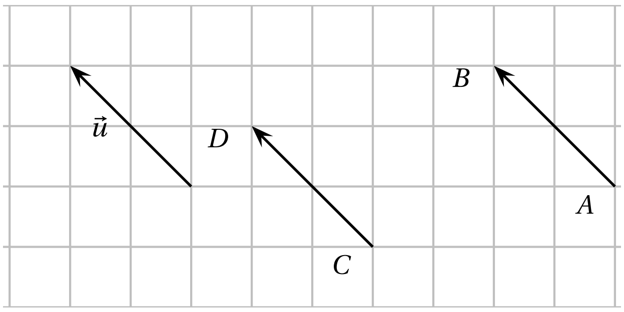
$\iff$ $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

$\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Remarques :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Ainsi, un vecteur est indépendant de son origine, seul compte le trajet entre son départ et son arrivée.

Exemples :



Exemple :

Associer à chaque égalité vectorielle la phrase correspondante, et illustrer chaque cas par un schéma :

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(a) $ABCD$ est un parallélogramme

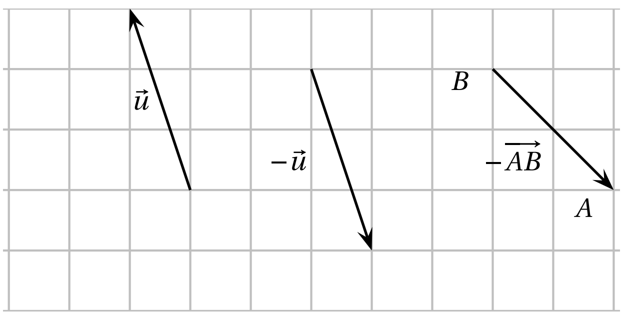
(b) $ABDC$ est un parallélogramme

(c) D est le milieu de $[AB]$

Définition 6 : *Vecteur opposé*

Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B et A.

C'est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, aussi noté $-\overrightarrow{AB}$.



Remarques :

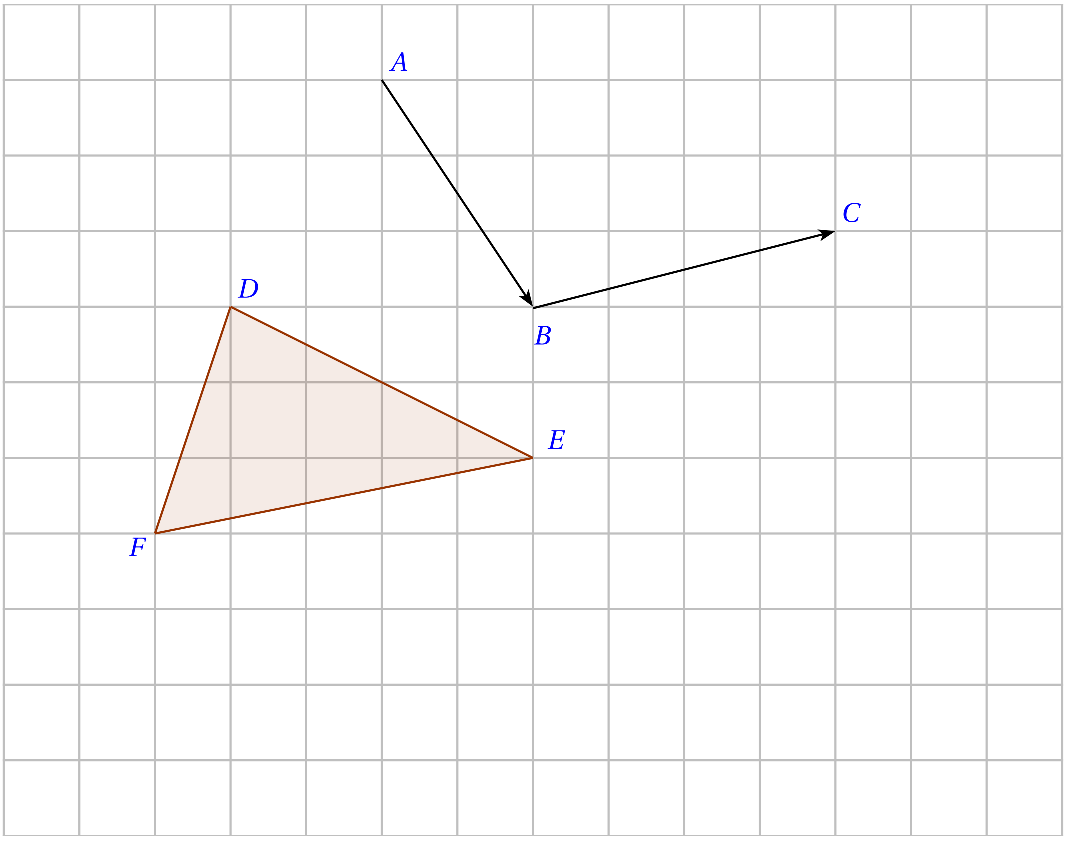
- Le vecteur nul n'a ni direction, ni sens et sa longueur vaut 0.
- Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur, mais des sens opposés

Exercices du livre :
n° 5-6-7-10 p 204

III) Opérations sur les vecteurs

III-1 Somme de vecteurs

***Travail de l'élève* 5.**



1. En utilisant le quadrillage, construire sur la figure ci-dessus :
   a. L'image D_1 du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. L'image D_2 du point D_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   c. Faire de même avec les points E et F.
2. Quelle semble être la nature de la transformation qui transforme le triangle DEF en $D_2E_2F_2$? Préciser son vecteur.

Relation de Chasles
On dit que le vecteur de la translation obtenue en appliquant successivement les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, est **la somme des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Cette somme est notée $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$

Définition 7 : *Somme de vecteurs*

La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.
Autrement dit, pour tous points A, B et C, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur associé à la translation obtenue en appliquant successivement la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Propriété 4 : *Relation de Chasles*

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

Remarques :

– On retiendra que pour un vecteur, les « détours » ne comptent pas.
Ainsi, aller de A en B, puis de B en C revient à aller directement de A en C.
– L'addition de vecteurs possède les mêmes propriétés que l'addition de réels (associativité, communativité, élément neutre).

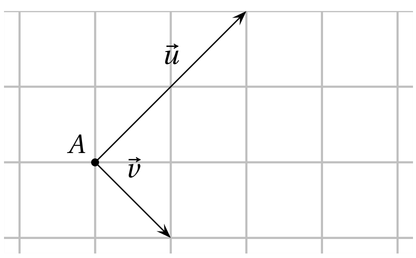
Méthode de constructions

Soit A un point donné quelconque. Pour construire M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ on peut procéder ainsi :

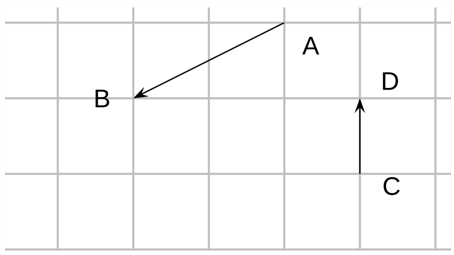
1. On place N tel que $\overrightarrow{AN}=\vec{u}$, ie qu'on reporte $\vec{u}$ au départ de A et on arrive en N.
2. Puis on place le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$, ie qu'on reporte $\vec{v}$ au départ de N et on arrive en le point M cherché.
« On dispose bout à bout les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en partant du point de départ. »

Exemples :

1. Construire M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



Exemple :

Montrer que pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+(-\overrightarrow{DB})=\vec{0}$

Exercices du livre :

n° **24**-25-**26**-27-29-30 p 206

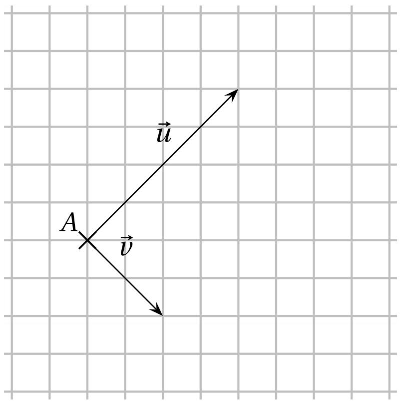
III-2 Conséquences

Définition 8 : *Différence de vecteurs*

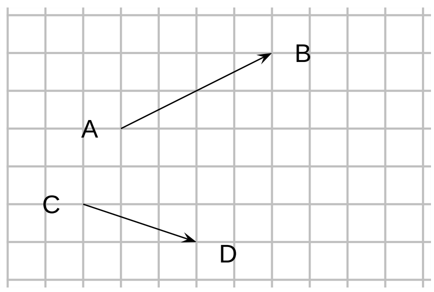
La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ obtenu en ajoutant à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$.
Autrement dit, on a $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Exemples :

1. Construire M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}-\vec{v}$ sur le schéma ci-dessous :



2. Construire E sur le schéma ci-dessous tel que $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$



Exemple :

Montrer que pour tous points E, F, G et H on a : $-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{HG}-\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FH}=\vec{0}$

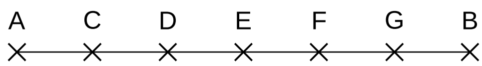
Définition 9 : *Produit d'un vecteur par nombre réel*

Soit $k\in\mathbb{R}^*$. Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur noté $k\vec{u}$. Il est définit le vecteur ayant :
- la même direction que $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$, le sens contraire si $k<0$.
- une norme égale à k fois celle de $\vec{u}$.

Remarques :
- Les droites portées par les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont parallèles (strictement ou confondues).
- On note $||\vec{u}||=|k|\vec{u}$ où $|k|$ désigne la distance à 0 du nombre k (c'est donc un nombre positif). Ce nombre $|k|$ s'appelle valeur absolue de k.
- Si $k=0$, on pose $k\vec{u}=\vec{0}$
- Si $k\in\mathbb{N}$, cela revient à ajouter k fois le vecteur $\vec{u}$.

Exemple :

Le segment $[AB]$ est divisé en six parties de même longueur.



1. Compléter les relations suivantes par la lettre qui convient :

a. $\overrightarrow{E\ldots}=-2\overrightarrow{EF}$ **b.** $\overrightarrow{C\ldots}+\overrightarrow{\ldots G}=\vec{0}$ **c.** $\overrightarrow{AB}=-6\ldots\ldots$

2. Compléter les relations suivantes par le nombre qui convient :

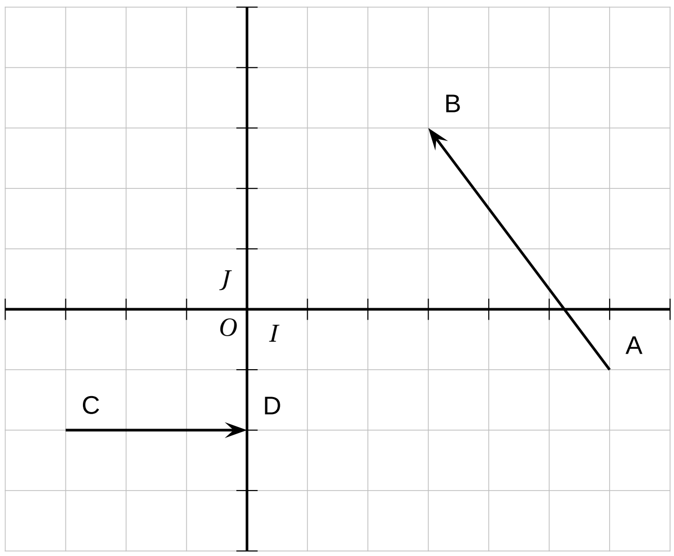
a. $\overrightarrow{AB} = \dots \overrightarrow{CE}$ **b.** $\overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{BF}$ **c.** $\overrightarrow{BF} = \dots \overrightarrow{DE}$ **d.** $\overrightarrow{CD} = \dots \overrightarrow{AB}$

Exercices du livre :

n° 34-35-40-41-42-43 p 206

IV) Coordonnées d'un vecteur

Travail de l'élève **6.**



1. Construire sur la figure ci-dessus :

a. L'image M_1 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
Quelles sont les coordonnées de M_1 ?
Quel lien pouvez-vous faire avec le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$? avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$?

b. L'image M_2 de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$
Quelles sont les coordonnées de M_2 ?
Quel lien pouvez-vous faire avec le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$? avec le vecteur $\overrightarrow{CD}$?

2. Compléter le tableau suivant avec les coordonnées :

Point de départ	$A(\dots;\dots)$	$C(\dots;\dots)$	$B(\dots;\dots)$	$D(\dots;\dots)$	$C(\dots;\dots)$	$D(\dots;\dots)$
Point d'arrivée	$B(\dots;\dots)$	$D(\dots;\dots)$	$A(\dots;\dots)$	$A(\dots;\dots)$	$B(\dots;\dots)$	$B(\dots;\dots)$
Vecteur associé	$\overrightarrow{AB}(\dots;\dots)$					

3. Conjecturer une formule sur les coordonnées de A et B pour trouver celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$

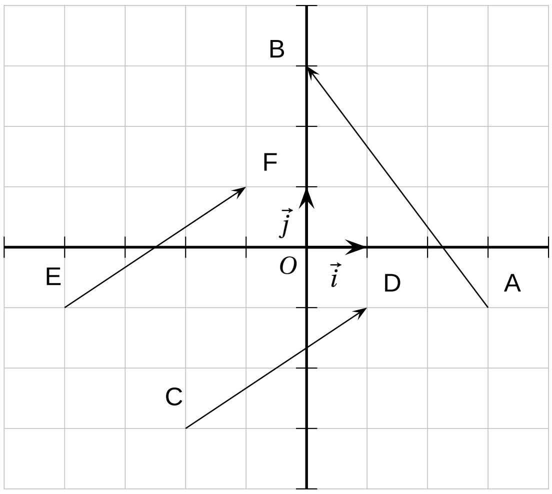
A partir de maintenant, on munit le plan d'un repère.

Définition 10 :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x; y)$, on note $\vec{u}(x; y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Remarques :

- Le couple $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond également au déplacement effectué sur le quadrillage.
- Celles-ci sont donc indépendantes de l'origine du repère.
- Bien souvent, au lieu de noté $(O; I; J)$ un repère, on notera $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
  Il s'agit d'un repérage en deux dimensions (évoquer la droite et l'espace).

Exemple :



Sur cette figure, on a $\overrightarrow{AB}(-3; 4)$, $\overrightarrow{CD}(3; 2)$ et $\overrightarrow{EF}(3, 2)$

Propriété 5 :
Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Longleftrightarrow x = x \text{ et } y = y'$$

Preuve
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.
Ainsi $\vec{u} = \vec{v}$ ssi $M = M'$, c'est-à-dire que M et M' ont les mêmes coordonnées. Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, on a donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

Propriété 6 :

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Preuve

Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note M le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.
Alors $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu I.
D'où $x_I = \dfrac{x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B}{2}$ et $x_I = \dfrac{x_A + x_M}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_M}{2}$.
On en déduit que $\dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B}{2} \iff x_A + x_M = x_B \iff x_M = x_B - x_A$.
De même on trouve $y_M = y_B - y_A$.
Donc $\overrightarrow{OM}(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ on a aussi $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Exemple :

Soient $A(2;3)$ et $B(5;-4)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3;-7)$.

Définition 11 : *Norme*

La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul.
On le note $||\vec{u}||$. En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Propriété 7 :

Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur dans un repère **orthonormal** $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En particulier, on a pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

Dans l'exemple précédent,on avait $\overrightarrow{AB}(3;-7)$. Donc dans un repère orthonormé on a

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Exercices du livre :

n° **12**-**14**-15-17-18 p 205

IV-1 Opérations et coordonnées

Propriété 8 :
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et k un nombre réel. Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors :

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$ et $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$

Exemple :
On donne les points $A(-3;1)$, $B(5;2)$ et $C(0;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+1.5\overrightarrow{OB}$
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}=5(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{OC})$
3. Déterminer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$

Exercices du livre :
n° 20-**21**-22 p 205 (addition)
31-32-34-36-40 p 206

V) Droites et colinéarité

V-1 Vecteurs colinéaires

***Travail de l'élève* 7.** Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan..
Soient cinq points $A(2;5)$, $B(-1,4)$, $C(8;7)$, $D(0;-4)$ et $E(4.5;-0.5)$

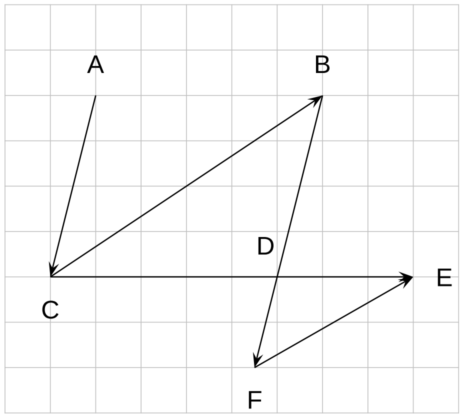
1. Faire un schéma.
2. **a.** Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$.
   b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (ED) ?
3. **a.** Trouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   c. Que peut-on en déduire sur la direction de ces deux vecteurs ? sur les droites (AB) et (AC) ?
   d. Que peut-on alors en déduire pour les points A, B et C ?

Définition 12 :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 1 :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exemple :

Citer des vecteurs colinéaires de la figure ci-dessous et traduire par une relation vectorielle :



Exemples :

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4.5\\6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

Exercices du livre :

n° 46-47 p 207

V-2 Application à la géométrie

Propriété 9 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1 :

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode

Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exemple :

On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABED$
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exemple :

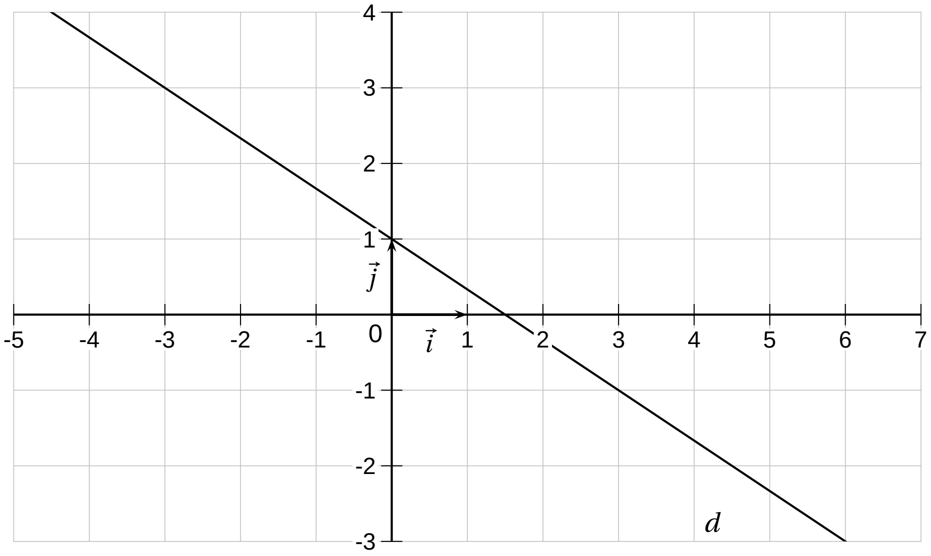
Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercices du livre :

n° 49-50-51 p 207 + 38 p 182

V-3 Equation de droite

Travail de l'élève **8.**



1. Soit la droite d représentée ci-dessus.

a. Déterminer graphiquement la fonction affine qu'elle représente.

b. Dire si les points suivants appartiennent à d ou non.

$$A\left(-1;\frac{5}{3}\right) \qquad B\left(100;-\frac{197}{3}\right) \qquad C\left(0;\frac{1}{3}\right) \qquad D(-3;3)$$

c. Calculer l'ordonnée du point E d'abscisse 0 appartenant à d.

d. Calculer l'abscisse du point F d'ordonnée 1 appartenant à d.

2. Soit d' la droite passant par $K(3;2)$ et de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

a. Tracer d' dans le repère ci-dessus.

b. Trouver par le calcul les coordonnées du point d'intersection de d' avec l'axe des ordonnées.

c. En déduire la fonction affine que d' représente, puis l'équation de d'.

3. Soient $A(2;0)$, $B(2;-15)$ et $E(2;2010)$.

a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b. La droite (AB) est-elle représentative d'une fonction affine ?

c. Soit $M(x;y)$ un point du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur ses coordonnées pour que $M \in (AB)$.

d. Construire dans le repère les droites d'équation $x=0$, $x=-3$ et $x=\frac{7}{2}$.

Remarque : Dans le plan muni d'un repère, une droite peut être :
– Soit parallèle à l'axe des ordonnées,
– Soit sécante à l'axe des ordonnées : c'est alors la courbe représentative d'une fonctin affine.

Propriété 10 :
- Une droite d, parallèle à l'axe des ordonnées a une équation du type $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.
- Une droite d sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des nombres réels.

Remarque : Cela signifie qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient à $d : y = mx + p$ si et seulement si $mx_A + p = y_A$

Définition 13 :
Une équation de la droite d, de la forme $y = mx + p$ est appelée **équation réduite** de d, m son **coefficient directeur** et p son **ordonnée à l'origine**.

Remarque : L'équation réduite d'une droite est unique.

Propriété 11 :
Deux droites d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles ssi $m = m'$.
Si deu xplus, $p = p'$, alors elles sont confondues.
Deux droites d'équation $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles (puisque toutes deux parallèles à (Oy)).

Exemple :
Les droites d'équation $y = 36.5x - 54$ et $y = 36.5x + \pi$ sont parallèles.

Propriété 12 : ***Défintion***
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.
Alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est **un vecteur directeur** de la droite (AB).
De plus, si A et B n'ont pas la même abscisse (ie $x_A \neq x_B$ ou encore (AB) non parallèle à l'axe des ordonnées) alors le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque : On retrouve la fait que deux droites sont parallèles si et seulement si leur vecteur directeur sont colinéaires, puisque ceci équivaut à ce que leurs coordonnées soient proportionnelles.

Exemple :
Soient $A(-1,3)$ et $B(4,13)$. On constate de suite que $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et son équation est du type $y = mx + p$.
On commence alors par chercher son coefficient directeur : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{13-3}{4-(-1)} = 2$.
Donc on sait que $y = 2x + p$.
On cherche maintenant l'ordonnée à l'origine p. Pour cela, on utilise le fait que $A \in (AB)$.
En effet, on sait donc que ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (AB), ie

$$y_A = 2 \times x_A + p \iff 3 = 2 \times (-1) + p \iff 3 = -2 + p \iff p = 5$$

Finalement, on a $(AB) : y = 2x + 5$

Exercices du livre :

n° 1-2-7-9-10-12-20-21-22-23-24-26-27 p180

V-4 Intersection de droites

Propriété 13 :

Soient deux droites d et d' d'équation $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient alors les deux équations de droite.

Autrement dit, ce sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$$

Exemple :

Soient $d : y = 2x - 3$ et $d' : y = -x + 3$. On voit de suite que $m \neq m'$ donc les droites ne sont pas parallèles. Elles se coupent alors en un point.

Pour trouver les coordonnées de ce point, on résout :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

On en déduit $2x - 3 = -x + 3 \iff 3x = 6 \iff x = 2$.

Et comme $y = 2x - 3$ on trouve $y = 1$. Donc le point d'intersection de d et d' est le point de coordonnées $(2;1)$

Remarques :

- On aurait tout aussi bien pu trouver y à partir de la deuxième équation.
- Lorsque les droites sont parallèles strictement, le système n'a pas de solution.
- Lorsque les droites sont confondues, le système a une infinité de solutions.

Exercices du livre :

n° 29-31-32-33-34 p 181