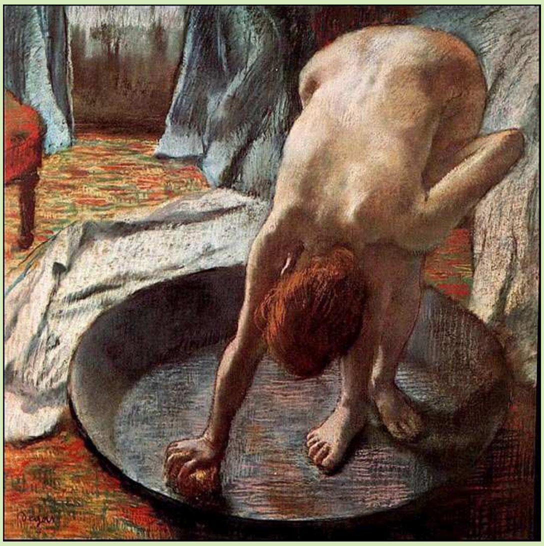
Chapitre 5

Fonctions de Référence

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* 3 000 *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye 300 000 *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »

EDGAR DEGAS

LEÇON 3

Fonctions de Référence

Au fil du temps

Nous avons déjà entrevu ce que sont les fonctions. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'ensemble de définition, les variations et le signe de certaines fonctions dites « de référence ». Il s'agit de fonctions plutôt simples à partir desquelles on en construit de nouvelles, plus complexes, mais dont les propriétés seront mises en évidences grâce aux fonctions de référence.

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé du plan.

I) Fonctions de Référence

Dans toutes cette partie, a et b désignent deux réels fixés.

I-1 Définition

I-1.1 Fonction carré $x \mapsto x^2$

Définition 1 :

On appelle fonction carré la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Remarque : La fonction carrée ne possède ni quotient, ni racine, elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercices du livre :

2-3-4-5-6 p 84 (images) + 8-10 p 84 (antécédents)

I-1.2 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Définition 2 :

On appelle fonction inverse la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque : La fonction inverse possède un quotient, mais pas racine. Son quotient existe dès que $x \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Exercices du livre :

26 à 28 p 85 + 30 - 31 p 86

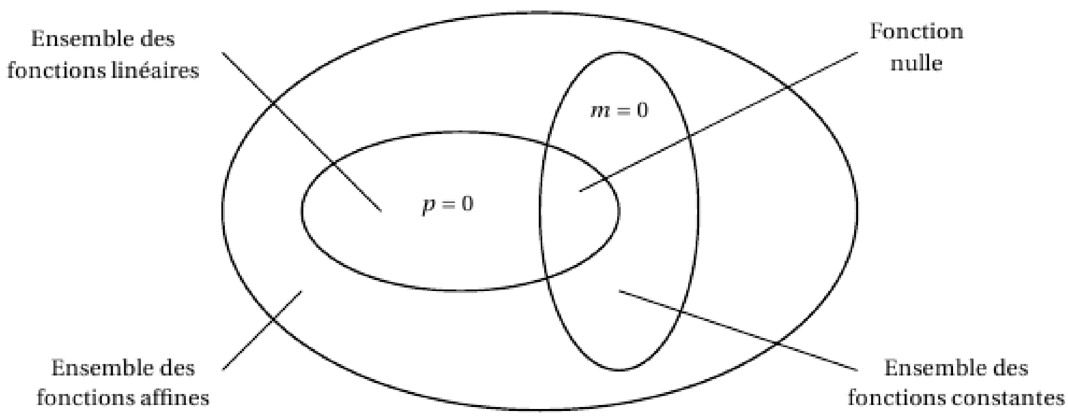
I-1.3 Les fonctions affines

Définition 3 :

On appelle **fonction affine** toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = ax + b$.

Remarques :

– L'expression algébrique d'une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine.
  Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.
– Les fonctions affines pour lesquelles $b = 0$, donc du type $f(x) = ax$ sont appelées fonctions linéaires.
– Les fonctions affines pour lesquelles $a = 0$, donc du type $f(x) = b$ sont appelées fonctions constantes.



Exemples :

Les fonctions $f : x \mapsto 3x + 2$, $g : x \mapsto -\pi x + \frac{2}{3}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto 3$ sont affines.

Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2 + 2$ et $m : x \mapsto \frac{3}{x} + 2$ ne le sont pas.

Exemple :

Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -1$.

f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. On a :

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 + b = 5 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - a \\ -2a + (5 - a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - a \\ -3a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto 2x + 3$.

Vérification : L'image de -2 par f est $f(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1$ et l'image de 1 est $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$.

Exercice 1 **:**

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2) = 9$ et $f(3) = -11$.

I-2 Sens de variation

I-2.1 Fonction carré

Travail de l'élève **1.** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. On considère a et b sont positifs. Etudier le signe de $a^2 - b^2$.
2. En déduire que $0 \leq a^2 < b^2$.
   Que pouvez-vous en conclure sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les positifs ?
3. Démontrer que si a et b sont négatifs, alors $0 \leq a^2 < b^2$ Que pouvez-vous en déduire sur le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2$ sur les négatifs ?
4. Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 < b^2$.
   Trouver un exemple pour $a < 0$ et $0 < b$ tels que $a^2 > b^2$.
   Que pouvez-vous en déduire sur la comparaison des carrés de deux nombres de signe différent ?

Propriété 1 :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

D'après le tableau de variations, la fonction carrée admet 0 comme minumum sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Exemple :

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $(2.3)^2$ et $(2.15)^2$
2. $(-1.002)^2$ et $(-0.999)^2$
3. π^2 et $(\pi - 1)^2$
4. $(2 - \sqrt{7})^2$ et $(2 - \sqrt{5})^2$

Exercices du livre :
16-17-18-19-20-21 p 84-85

I-2.2 Fonction inverse

Travail de l'élève **2.** Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

1. Vérifier que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$
2. Etudier le signe de $\frac{b-a}{ab}$.
3. En déduire l'ordre de $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Propriété 2 :
La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Preuve
Voir l'activité pour les positifs. On procède de même sur les négatifs.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

D'après le tableau de variations, la fonction inverse n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple :
Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans les calculer :

1. $\frac{1}{-0.012}$ et $\frac{1}{-0.099}$
2. $\frac{1}{\pi-3}$ et $\frac{1}{0.21}$
3. $\frac{1}{\pi-3}$ et $\frac{1}{-0.21}$
4. $\frac{1}{2-\sqrt{7}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{5}}$

Exercices du livre :
36 à 42 p 86

I-2.3 Fonctions affines

Travail de l'élève **3.** 22 p 69

Propriété 3 :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Si $a < 0$, alors f inverse l'ordre $\mathbb{R}$, ie f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $a > 0$, alors f est conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$, ie f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On cherche à savoir si $f(x) = ax + b$ et $f(y) = ay + b$ sont dans le même ordre.

$$\begin{aligned} & x < y \\ \overset{\times a<0}{\Longleftrightarrow} \quad & ax > ay \\ \overset{+b}{\Longleftrightarrow} \quad & ax + b > ay + b \\ \Longleftrightarrow \quad & f(x) > f(y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x < y \\ \overset{\times a=0}{\Longrightarrow} \quad & ax = ay = 0 \\ \overset{+b}{\Longleftrightarrow} \quad & ax + b = ay + b = b \\ \Longleftrightarrow \quad & f(x) = f(y) = b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & x < y \\ \overset{\times a>0}{\Longleftrightarrow} \quad & ax < ay \\ \overset{+b}{\Longleftrightarrow} \quad & ax + b < ay + b \\ \Longleftrightarrow \quad & f(x) < f(y) \end{aligned}$$

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction affine en fonction du signe de a.

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Exemple :

On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = -3x - \dfrac{5}{8}$, $g(x) = 87\,968x - \sqrt{5\,468}$.

1. Donner, sans calculatrice, l'ordre des images des nombres :
   - **a.** 1 et 5
   - **b.** $\sqrt{10}$ et $-\pi$
   - **c.** $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$
2. Donner, sans calculatrice, l'ordre des antécédents des nombres :
   - **a.** $-\dfrac{45}{987}$ et $-\dfrac{45}{65498}$
   - **b.** $\sqrt{180}$ et $2\sqrt{98}$
   - **c.** $\dfrac{3^4 \times 5^{13}}{15^7}$ et $\dfrac{5^3 \times 3^{10}}{15^{10}}$

Exercices du livre :

14 à 16 p 69

I-3 Représentation graphique

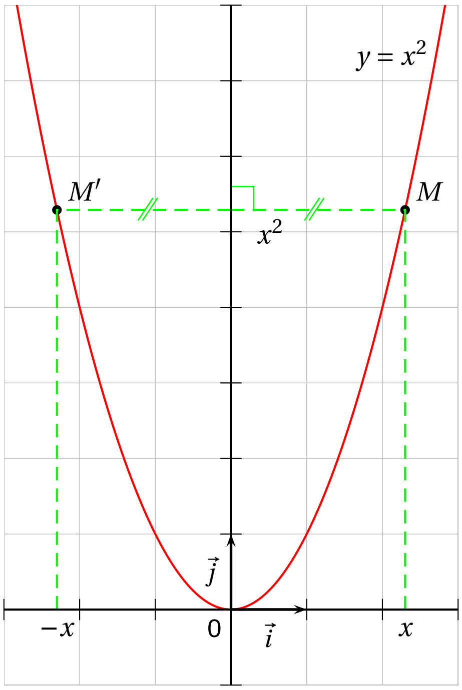
I-3.1 Fonction carré

Définition 4 :

La courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** de sommet l'origine du repère.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	...
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	...



Exercices du livre :

7 p 84 + 11 à 14 + 23 à 25 p 85

Propriété 4 :

La courbe de la fonction carré est *symétrique* par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que la fonction est **paire**. Cela se traduit par les condtions :

- L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0
- Pour tout $x \in \mathscr{D}$ on a $f(-x) = f(x)$.

Preuve

Pour tout nombre réel x le point $M(x; x^2)$ est sur la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré.

Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x; x^2)$.

Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{P}$ car $(-x)^2 = x^2$.

Exercice 2 **:**

Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction carré et de la fonction affine définie par $f(x) = x$.

Comparer alors un réel et son carré. Justifier les réponses.

Exercices du livre :

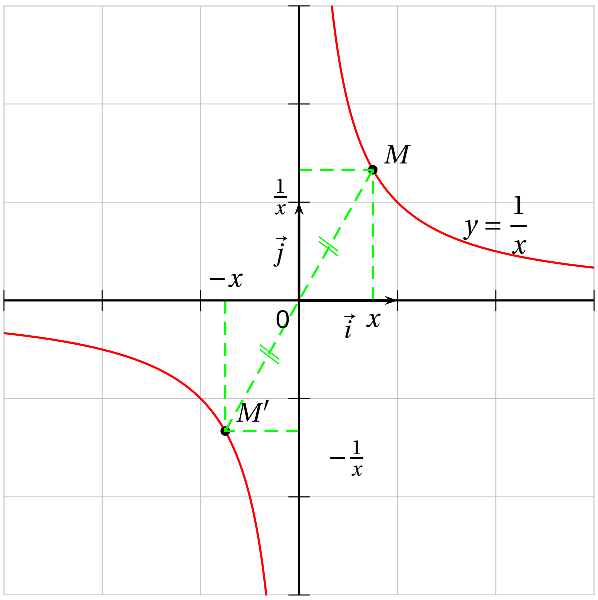
2-3-4-8-10 p 104

I-3.2 Fonction inverse

Définition 5 :
Dans un repère orthogonal, la courbe repésentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.

On esquisse la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ en s'appuyant sur un tableau de valeurs :

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$f(x)$	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-3



Exercices du livre :
29 p 85 + 35 - 44 à 46 p 86

Exercice 3 **:**
Tracer sur l'écran d'une calculatrice graphique les courbes de la fonction inverse et de la fonction affine définie par $f(x)=x$.
Comparer alors un réel non nul et son inverse. Justifier les réponses.

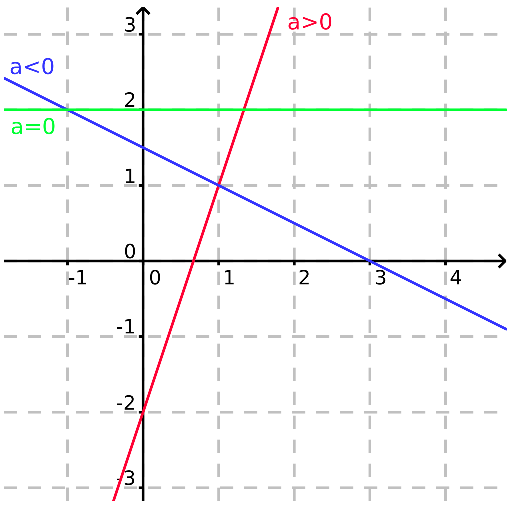
Propriété 5 :
La courbe de la fonction inverse est *symétrique* par rapport à l'origine du repère.
On dit que la fonction est **impaire**. Cela se traduit par les conditions :
– L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0
– Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $f(-x)=-f(x)$

Preuve
Pour tout nombre réel $x \neq 0$ le point $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ est sur la hyperbole $\mathscr{H}$ représentative de la fonction inverse.
Son symétrique par rapport à l'origine du repère est $M'\left(-x;-\frac{1}{x}\right)$.
Or ce point M' est lui aussi sur $\mathscr{H}$ car $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$.

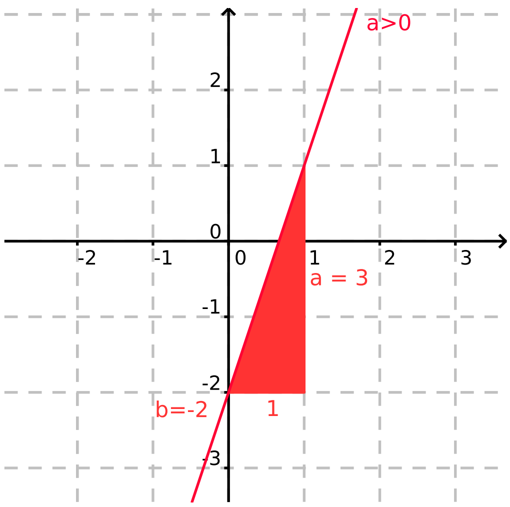
I-3.3 Fonctions affines

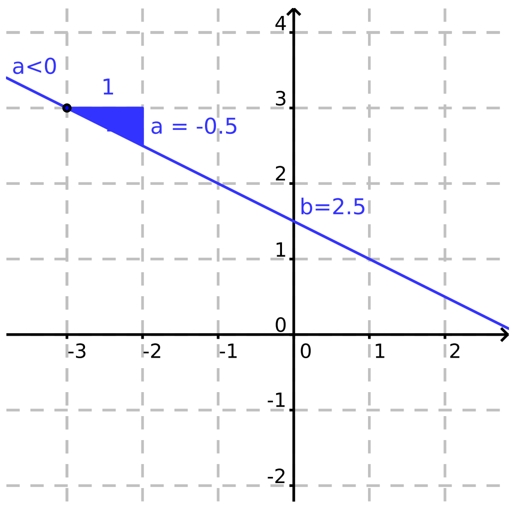
Travail de l'élève **4.** Sur Géogébra, construire la droite passant par les points $A(0;2)$ et $B(1;-3)$.
Afficher l'équation de la droite.
Laisser A fixe quelques temps et déplacer B.
Conjecturer les lectures graphiques de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur.
Afficher la pente si nécessaire.

Propriété 6 : *Définition*
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y = ax + b$.
a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.



Interprétation graphique du coefficient directeur





Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine
On a donc deux méthodes :
- Choisir deux nombres x_1 et x_2, calculer leurs images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, placer les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ dans un repère, puis les relier à la règle.
- Placer le point sur l'axe des ordonnées par lequel passe la droite grâce à l'ordonnée à l'origine, puis tracer la droite en utilisant l'interprétation graphique du coefficient directeur.

Exercice 4 :

1. Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$. En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x+1$.

1. Trouver les images de 0 et de -2 par la fonction f.
2. Calculer $f\left(\frac{4}{3}\right)$.
3. Trouver les éventuels antécédents de 0 et -2 par la fonction f.
4. Résoudre $f(x) = \frac{4}{3}$.
5. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé et contrôler graphiquement les résultats précédents.

Exercices du livre :

5-6-7 p 60

Exercices du livre :

Défis : 55 à 57 p 76

Exercices du livre :

33 p 71 + 26 p 69 + 20 p 68 (Algorithme de tracé à faire en module)

I-4 Signe

On sait qu'un carré est toujours positif. La courbe représentative de la fonction carré est donc toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

On sait qu'un nombre et son inverse sont de même signe.

Travail de l'élève **5.** On cherche à connaître le signe de différentes expressions du type $ax+b$.

1. Etude du signe de $2x-3$:
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3=0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3<0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3>0$
- Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$\cdots$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$\cdots$	0	$\cdots$	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x-4$

3. Cas général : Étudier le signe de $ax+b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

Propriété 7 :

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$.

Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe Opposé de a	0	Signe de a	

Preuve

Si $a>0$ (on raisonne de même si $a<0$) :

$$ax+b=0 \overset{-b}{\iff} ax=-b \overset{\times\frac{1}{a}}{\iff} x=-\frac{b}{a}$$

$$ax+b>0 \overset{-b}{\iff} ax>-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x>-\frac{b}{a}$$

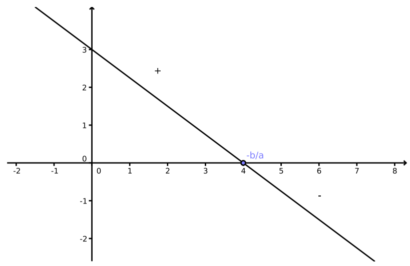
$$ax+b<0 \overset{-b}{\iff} ax<-b \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\iff} x<-\frac{b}{a}$$

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{3}{4}x+3$ admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $-\dfrac{3}{4}x+3$		$+$	0	$-$	

car $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{-\frac{3}{4}} = 3 \times \dfrac{4}{3} = 4$ et $a>0$. De plus, elle a pour représentation graphique :



Exercices du livre :

17-18 p 67

Donner des fiches de révision par fonction

II) Fonctions associées

II-1 Fonctions polynômes de degré 2

II-1.1 Définition

Travail de l'élève **6.**

Partie A : A l'aide de Géogébra, on crée trois curseurs a, b et c vairant entre -5 et 5 avec un pas de 0.1.
Dans la ligne de saisie, on tape l'expression $f(x) = a * x^2 + b * x + c$

1. Reproduire cette construction.
2. Faire varier successivement les trois curseurs
3. Quelles conjectues peut-on faire quant à l'influence de chacun des coefficients a, b et c sur les variations de f ?
4. Conjecturer l'aide du logiciel le tableau de variation de la fonction f dans les cas suivants :
   - **a.** $f(x) = 0.3x^2 + 1.2x - 3.8$
   - **b.** $g(x) = -1.5x^2 + 3x + 0.5$

Partie B : A l'aide de Géogébra, on crée trois curseurs a, α et β vairant entre -5 et 5 avec un pas de 0.1.
Dans la ligne de saisie, on tape l'expression $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
*Une expression de ce type peut s'écrire en développant ax^2+bx+c. L'expression $a(x-\alpha)^2+\beta$ s'appelle la **forme canonique**.*

1. Reproduire cette construction.
2. Faire varier successivement les trois curseurs.
3. Quelles conjectues peut-on faire quant à l'influence de chacun des coefficients a, α et β sur la représentation graphique de f ?
4. Conjecturer l'aide du logiciel le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :
   - **a.** $h(x) = 0.3(x-1.2)^2 - 3.8$
   - **b.** $k(x) = -1.5(x+3)^2 + 0.5$

Partie C :

1. **a.** Vérifier que $f(x) = 0.3x^2 + 1.2x - 3.8 = 0.3(x+2)^2 - 5$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f et son minimum sur $\mathbb{R}$ (préciser quand il est atteint)
2. **a.** En développant l'expression $-1.5(x-\alpha)^2 + \beta$, trouver la forme canonique associée à l'expression $g(x) = -1.5x^2 + 3x + 0.5$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction g et son maximum sur $\mathbb{R}$ (préciser quand il est atteint)

Dans toute cette partie, a, b et c désignent des réels fixés avec $a \neq 0$.

Définition 6 :

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On appelle cette écriture la **forme développée** de f.

Remarque : Ces fonctions n'ont ni racine ni quotient, elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

II-1.2 Forme canonique et variations

Propriété 8 : *Définition*

Pour toute fonction polynôme de degré 2 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β uniques tels que pour tout réel x on a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
On appelle cette écriture la **forme canonique** de f.

Exemples :

$3x^2 - 12x + 5 = 3(x-2)^2 - 7$ et $-2x^{-}2x = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

Propriété 9 :

Les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ sont de deux types, suivant le signe de a.

– Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

– Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Preuve

La fonction f est définie par l'enchaînement :

$$x \longmapsto x-\alpha \longmapsto (x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$$

Considérons le cas $a < 0$. Soient $x_1 < x_2 < \alpha$. Regardons l'ordre de leurs images par f.

$$\begin{aligned}
x_1 < x_2 < \alpha &\iff x_1-\alpha < x_2-\alpha < 0 \\
&\iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2 > 0 \quad \text{(la fonction carré est décroissante sur les négatifs)} \\
&\iff a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2 < 0 \quad \text{(multiplier par un nombre négatif change l'ordre)} \\
&\iff a(x_1-\alpha)^2+\beta < a(x_2-\alpha)^2+\beta < \beta \\
&\iff f(x_1) < f(x_2) < \beta
\end{aligned}$$

L'ordre est inchangé, donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;\alpha[$.
On peut faire de même pour $x_1 > x_2 > \alpha$.

$$\begin{aligned}
x_1 > x_2 > \alpha &\iff x_1-\alpha > x_2-\alpha > 0 \\
&\iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2 > 0 \quad \text{(la fonction carré est croissante sur les positifs)} \\
&\iff a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2 < 0 \quad \text{(multiplier par un nombre négatif change l'ordre)} \\
&\iff a(x_1-\alpha)^2+\beta < a(x_2-\alpha)^2+\beta < \beta \\
&\iff f(x_1) < f(x_2) < \beta
\end{aligned}$$

L'ordre est inversé. Donc la fonction f est décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.

Exemple :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 28x + 87$.

- Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = 2(x+7)^2 - 11$.
- En déduire le tableau de variations de f.

Exemple :

Justifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2 + 6x + 2$ admet le tableau de variations ci-dessous :

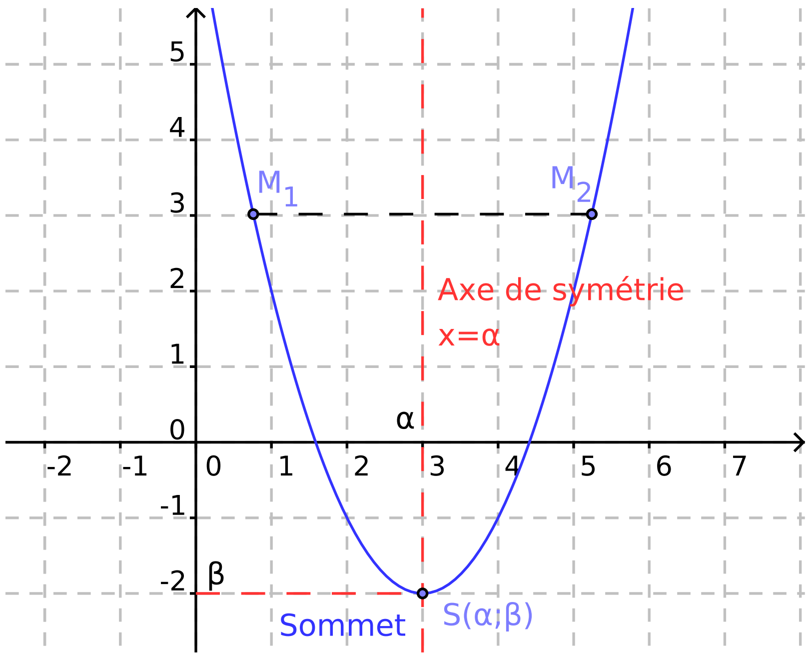
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$

Proposition 1 : *Définition*

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$.

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

La parabole a pour axe de symétrie la droite passant par S et parallèle à l'axe des ordonnées.



Remarque : Si deux points de la parabole M_1 et M_2 d'abscisse x_1 et x_2 ont la même ordonnée, alors le sommet S a pour abscisse $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Exemple :

On note $\mathscr{P}$ la parabole représentatn la fonction $f : x \mapsto ax^2 + 3x - 4$ dans un repère orthogonal.

1. Calculer le réel a sachant que la parabole $\mathscr{P}$ passe par le point $A(3;-4)$
2. Déterminer un autre point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée -4.
3. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$
4. Etablir le tabelau de variations de la fonction f.

Exercices du livre :

2-3-4-8-10 p 104 (certains auront déjà été traités) + Trouver des exos sur la symétrie de la courbe et le sommet

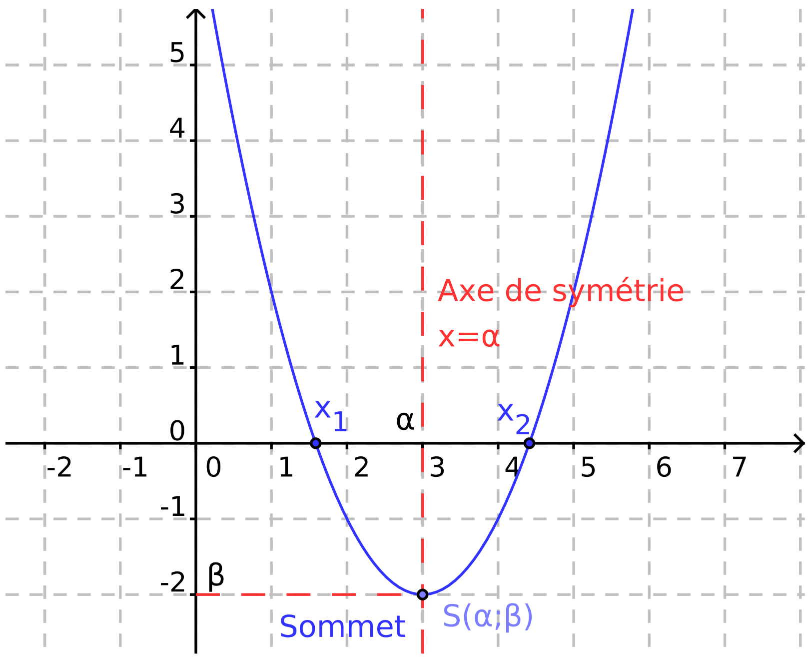
II-1.3 Forme factorisée et signe

Travail de l'élève **7.** Hyperbole Activité 1 p 117

Propriété 10 : *Définition*

Lorsque la parabole représentative d'une fonction polynôme de degré 2 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, coupe l'axe des abscisses en $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$, alors $f(x)$ peut se factoriser et on a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Remarque : Cette troisième écriture est utile pour résoudre l'équation produit nul $f(x) = 0$ ou étudier le signe de $f(x)$.

En effet, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercices du livre :
15 à 18 p 105 + 26-27 p 107 + 50-52-53 p 111

Signe d'un produit
Grâce à la règle des signes dans une multiplication, on peut trouver le signe d'un produit d'expressions du type $ax+b$.
Pour cela, on commence par résoudre l'équation produit nul, puis on utlise un grand tableau de signes.
Sur la dernière ligne, on trouve le signe du produit en appliquant la règle des signes.
Ceci nous permet désormais de résoudre des inéquations produits.

Attention !
Cette règle n'est pas valide pour l'addition de monômes !

Exemple :
Etudier le signe de $P(x) = (2x+1)(-x+2)$,
- Résoudre $2x+1=0$
- Résoudre $-x+2=0$
- Compléter le tableau de signe suivant, contenant une ligne par facteur :

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$		$+\infty$
Signe de $2x+1$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	
Signe de $-x+2$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	
Signe de $(2x+1)(-x+2)$		$\dots$		$\dots$		$\dots$	

Conclusion :
- $P(x) > 0$ ssi $x \in \dots$
- $P(x) < 0$ ssi $x \in \dots$
- $P(x) = 0$ ssi $x \in \dots$

On sait ainsi que les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est $S = \dots$

Exercices du livre :
8 à 21 p 120 + 34-35 p 123

II-2 Fonctions homographiques

II-2.1 Définition

Définition 7 :

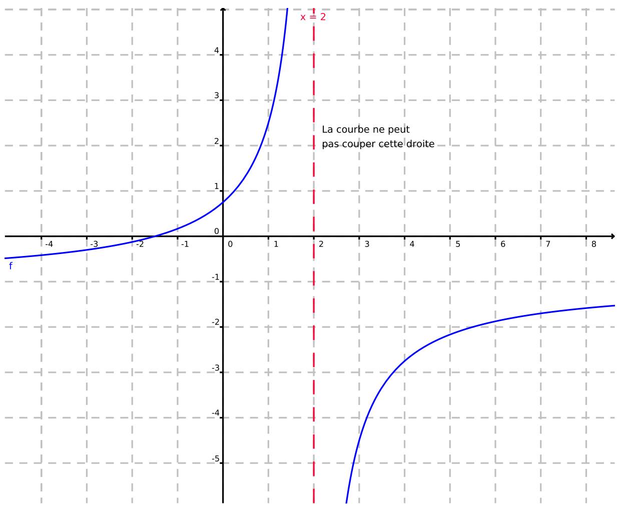
On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des réels fixés avec $c \neq 0$ et $a \times d \neq b \times c$.
La courbe représentative s'appelle une **hyperbole**.

Remarques :

– La condition $ad \neq bc$ traduit le fait que $ax+b$ et $cx+d$ ne sont pas proportionnels.
– L'expression algébrique d'une fonction homographique contient un quotient. Elle n'existe que si le dénominateur $cx+d$ est différente de 0, ie $x \neq -\dfrac{d}{c}$.
L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} \left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{-2x+4}$ a pour ensemble de définition $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
La courbe représentative de f dans un repère est formée de deux branches distinctes, séparée par la droite d'équation $x = 2$.



Exercices du livre :

20-21 p 105 + 46-48-49-50-51 p 125

Exercice 6 **:**

Ecrire un algorithme qui lit un nombre non nul x et qui affiche alors le plus grand des nombres x^2 et $\dfrac{1}{x}$.

Exercice 7 :

1. Ecrire l'algorithme de calcul de la fonction f définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}+3$$

2. Soient a et b appartenant à $]-\infty;2[$ tels que $a<b$.
   En utilisant l'algorithme ci-dessus et les variations des fonctions de référence, comparer $\frac{-5}{(a-2)^2}+3$ et $\frac{-5}{(b-2)^2}+3$
3. En déduire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]-\infty;2[$.
4. En suivant la même démarche, dire si f conserve ou inverse l'ordre sur $]2;+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f.

II-2.2 Signe d'une fonction homographique

Travail de l'élève **8.** Hyperbole Activité 2 p 117

Signe d'un quotient
Pour étudier le signe d'une fonction homographique, on procède de même que pour un produit de monôme, sauf qu'il faut considérer une valeur interdite.

Exemple :

Pour résoudre l'inéquation $\frac{3-x}{4x-1}>0$:

– On commence par résoudre

$$\frac{3-x}{4x-1}>0 \iff 3-x=0 \text{ et } 4x-1\neq 0 \iff x=3 \text{ et } x\neq\frac{1}{4} \quad \textbf{(VI)}$$

– Ensuite on étudie le signe du quotient $\frac{3-x}{4x-1}$, en procédant comme dans l'activité.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
Signe de $3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{3-x}{4x-1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Exercices du livre :

22 à 31 p 121

Il faut avoir une haute idée, non pas de ce qu'on fait, mais de ce qu'on pourra faire un jour ; sans quoi ce n'est pas la peine de travailler.