Chapitre 4

Probabilités

Hors Sujet

Titre : « Death Note »

Auteur : Oba et Obata

Présentation succinte de l'auteur : *Death Note* est un manga de type shônen, créé par le scénariste Tsugumi Oba et le dessinateur Takeshi Obata. Il a été prépublié dans un journal de 2003 à 2006, et par la suite publiée en douze tankôbon de 2004 à 2006.

L'histoire est centrée sur *Raito Yagami*, un lycéen surdoué qui juge le monde actuel criminel et corrompu. Sa vie change du tout au tout le jour où il ramasse par hasard un mystérieux cahier intitulé « Death Note ». Ancienne propriété d'un dieu de la mort, le Death Note permet à son utilisateur de tuer toute personne dont il connaît le nom et le visage. Raito décide d'utiliser le Death Note pour exterminer les criminels, dans le but d'éradiquer le Mal et de bâtir un monde parfait dont il sera le dieu.

Mais les nombreuses morts inexpliquées de criminels à travers le monde attirent l'attention d'Interpol et du mystérieux *L*, un détective capable de résoudre n'importe quelle énigme, mais dont personne ne connaît ni le visage ni le nom. L décide d'enquêter pour capturer le tueur en série, surnommé par le grand public « Kira ». Entre Raito et L, tous deux persuadés d'agir pour la justice, s'engage un combat acharné pour découvrir en premier l'identité de l'autre...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

JOHN LOUIS VON NEUMANN

LEÇON 4

Probabilités

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse (les mathématiciens disent axiomatique) en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI ème siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu.
Ainsi, le Grand Duc de Toscane demanda au vénérable Galilée pourquoi il était plus difficile d'obtenir 9 que 10 au jeu de passe-dix (jeu consistant à jeter 3 dés), même s'il n'y a dans les deux cas que 6 combinaisons pour les obtenir. La grande expérience du Duc en matière de jeu lui avait permis de remarquer ce phénomène, alors que théoriquement, « sur le papier », il aurait dû y avoir la même fréquence d'apparition des deux nombres, puisqu'il y a dans chaque cas 6 manières de les obtenir. Y aurait-il plusieurs réalités ?
Parmi toutes les définitions possibles du hasard, nous en retiendrons deux qui ont influencé la théorie des probabilités :

– pour certains, tout a une cause, et le hasard n'est le reflet que de l'ignorance que nous avons des lois de la Nature. Cet esprit souffla particulièrement au XVIII ème siècle au moment où Laplace posa les bases d'une première théorisation des probabilités. Les probabilités sont alors déterminées a priori, par des considérations non expérimentales. Par exemple, un dé a six faces, donc, on peut poser d'avance que l'événement « obtenir 5 » a une probabilité de 1/6. Cette symétrie, cette « géométrie du hasard » selon les termes de Pascal, permet de calculer sans ressentir le besoin de recourrir à l'expérience. Elle implique la notion centrale d'équiprobabilité : une probabilité est égale au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.
  Cette conception peut apparaître assez naïve : il est illusoire de penser qu'un dé puisse être parfaitement équilibré, mais doit-on être gêné pour autant ?
– pour d'autres, le hasard constitue notre univers, i.e qu'il n'est pas qu'une abstraction mathématiques mais une réalité physique. La théorie du chaos mise en forme par René Thom en 1955 montre en effet que dans certaines situations, on aura beau observer un phénomène pendant un temps très long, on ne pourra prévoir son évolution. De même en physique quantique, la connaissance du passé et du présent ne permettent pas de prévoir mieux des états possibles futurs.

Alors, le hasard, une réalité physique ou une invention mathématiques ? Au lieu de s'opposer, ces deux visions se complètent et il faut les avoir en tête. Ces deux notions ont en commun de postuler que l'issue de l'expérience (le jeter d'un dé) est indépendant de l'observateur. Ceci peut ne plus être vrai dans certains domaines, comme par exemple l'économie.

I) Vocabulaire

I-1 La notion de hasard

Le but de cette partie est de construire un modèle pour décrire les expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenue en lançant une pièce de monnaie, la carte obtenue en la tirant au hasard d'un jeu, le tirage du loto, etc... Le besoin d'avoir une méthode systématique de description de telles expériences est justifié par le fait que certains résultats qui nous sont parfois intuitivement évidents et que nous n'arrivons pas toujours a expliquer sont en fait faux ! Comme en témoigne l'exercice suivant :
Pensez-vous que dans un groupe de 30 personnes l'on rencontre fréquemment 2 personnes ayant leur anniversaire

le même jour ?
Pour avoir au moins une chance sur deux de trouver deux personnes ayant le même anniversaire, combien doit-il y avoir au minimum de personnes dans un groupe ?

Problème :
Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante : il y a trois portes, derrière l'une d'entre elle se trouve 10000€ et rien derrière les deux autres. Un candidat choisit au hasard l'une des trois. Ensuite le présentateur élimine une des deux portes mauvaises, tout en conservant celle choisit par le candidat. Le candidat peut alors conserver son choix ou le changer.
Que vaut-il mieux faire pour le candidat, changer ou conserver son choix ? Quels sont ces chances de gagner dans le premier cas, et dans le deuxième ?

I-2 Expérience aléatoire, événements

Travail de l'élève **1.** Activités 1 à 4 p 240 de l'hyperbole pour une séance révision.

Définition 1 :
Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain (mais dont on peut prévoir le type)

Exemple :
Le lancé de dé ou le lancé d'une pièce de monnaie sont des expériences dont l'issue est incertaine.

Définition 2 :
- Un des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité** ou **issue**
- L'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note souvent Ω.
- Un sous-ensemble de l'univers est appelé **événement**, c'est un ensemble constitué d'issues de l'univers.

Remarque : En classe de seconde l'ensemble Ω sera presque toujours un ensemble fini.

Exemples :
On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
On lance un dé à 6 faces on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse à la face obtenue : $\Omega = \{P, F\}$
On effectue la même expérience que précédemment en lançant deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$
Soit A l'événement « Obtenir au moins une fois pile »et B celui « Obtenir au plus une fois Pile ».
Alors $A = \{PP; PF; FP\}$ et $B = \{PF; FP; FF\}$.

Remarque : une même expérience peut déboucher sur deux univers différents suivant les hypothèses faites. Par exemple on lance deux dés et suivant si l'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenues, on obtient :

$$\Omega_p = \{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;24;25;30;36\}$$

$$\Omega_s = \{2;3;4;5;6;7.8;9;10;11;12\}$$

I-3 Introduction à la théorie des ensembles

Travail de l'élève **2.** Déclic : 3 p 189

Rappelons qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un certains nombre de propriété commune. Par exemple l'ensemble des nombres entiers naturels, ou encore les multiples de 3 inférieurs à 100, ...).
On les note avec des accolades.
Ici, il n'y aura pas de notion d'ordre. Ainsi $\{1,2\}$ et $\{2,1\}$ désigneront le même ensemble.
On utilise les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou non à un ensemble Enfin on note $\emptyset$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

Exemple :
Si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9 alors :

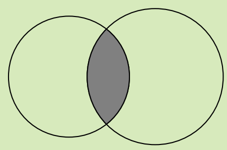
$$E = \{0;2;4;6;8\}$$

On a $2 \in E$ et $3 \notin E$.

Définition 3 :

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A **et** B, ie ceux qui sont communs à A et B. On note cet ensemble $A \cap B$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints ou incompatibles.



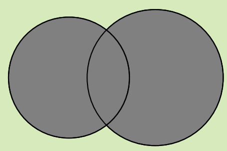
Exemples :
Si $A = \{0;2;4;6;8\}$ et $B = \{1;2;3;6;7\}$ alors $A \cap B = \{2;4;6\}$
Si $A =$« Tirer un roi » et $B =$ « Tirer un coeur » alors $A \cap B =$« Tirer le roi de coeur »

Remarque : $\omega \in A \cap B$ signifie « $\omega \in A$ et $\omega \in B$ »

Définition 4 :

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A **ou** dans B, ie dans au moins l'un des deux.

On le note $A \cup B$.

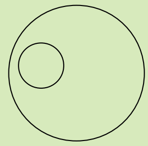


Exemples :
Si $A = \{0;2;4;6;8\}$ et $B = \{1;2;3;6;7\}$ alors $A \cup B = \{0;1;2;3;4;6;8\}$
Si $A =$« Tirer un roi » et $B =$ « Tirer un coeur » alors $A \cup B =$« Tirer un coeur ou un roi de trèfle, pique ou carreau »

Remarque : $\omega \in A \cap B$ signifie « $\omega \in A$ ou $\omega \in B$ »

Définition 5 :

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note : $A \subset B$.
On dit alors que A est une « partie »de B ou que A est un « sous-ensemble »de B.



Exemples :

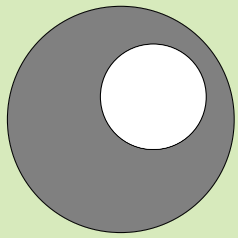
Si $A = \{0;2;4;6;8\}$ et $B = \{0;2\}$ alors $B \subset A$.
Si A =« Tirer un roi » et B = « Tirer une figure » alors $A \subset B$

Remarque : De plus on a toujours $A \subset A$, $\emptyset \subset A$, $A \subset (A \cup B)$ et $(A \cap B) \subset A$

Définition 6 :

Soit Ω un ensemble et A une partie de Ω. Le complémentaire de A dans Ω est constitué de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
On le note :

$\Omega - A$ ou $\bar{A}$ ou encore ${}^{C}A$



Exemples :

Si $A = \{0;2;4;6;8\}$ et $\Omega = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ alors $\bar{A} = \{1;3;5\}$
Si A =« Tirer un coeur » alors $\bar{A}$ =« Tirer un pique, carreau ou trèfle »

Remarque : De plus on a $A \cup \bar{A} = \Omega$, mais aussi $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Définition 7 :

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Ce nombre est noté Card E.
On convient que Card $(\emptyset) = 0$.

Exemple :

Si $E = \{0;1;2\}$, alors Card $E = 3$

Remarque : La notion de cardinal ne s'étend pas aux ensembles infinis, tel $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

Exemple :

On jette un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on s'interesse au numéro sur la face supérieure.

1. Définir l'univers Ω
2. Décrire les événements suivants :
   A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 »
   B : « obtenir un numéro impair »
   C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 »
3. Décrire les événements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cup C$; $C \cap B$; $C \cup B$; $\bar{A}$; $\bar{A} \cup C$; $\bar{A} \cap C$
4. Parmi les événements précédents, citer deux événements incompatibles qui ne sont pas contraire l'un de l'autre.

Exemple :

On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	Signification	Illustration
L'univers Ω (Evénement **certain**)	L'ensemble des éventualités	$\Omega = \dots$
L'ensemble vide $\emptyset$ (Evénement **impossible**)	L'ensemble qui ne contient aucune éventualité	« Obtenir ...... »
Éventualité ou **Issue**	L'un des résultats de l'expérience	« Obtenir 7 » : $\omega = \dots$
Événement	Sous-ensemble de l'univers	A =« Obtenir un nombre pair » $A = \dots$ B =« Obtenir une somme inférieure à 4 » $B = \dots$
Événement A **et** B $A \cap B$	Événement constitué des issues communes aux deux événements A et B	$A \cap B$ =« ... $A \cap B = \{\dots$
Événement A **ou** B $A \cup B$	Événement constitué de toutes les issues qui sont soit dans A, soit dans B, voire les deux	$A \cup B$ =« ... $A \cup B = \{\dots$
Événement **incompatibles** ou **disjoints**, (on note $A \cap B = \emptyset$)	Ce sont des événements qui n'ont aucunes issues en commun	$\dots \qquad = \emptyset$
Événement **contraire** Le contraire de A se note $\bar{A}$	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme l'univers $\bar{A}$ contient tous les éléments de l'univers sauf ceux de A	$\bar{A} = \dots$ $A \cap \bar{A} = \dots$ $A \cup \bar{A} = \dots$

Exercice 1 :

Une urne contient deux jetons rouges marquées R_1 et R_2 et deux jetons jaunes marquées J_2 et J_3.
On tire au hasard un premier jeton dans l'urne, puis, sans le remttre, on tire au hasard un deuxième jeton.
On note à chaque tirage la couleur et le numéro obtenu.

1. Quel est l'univers de cet expérience ?
2. Ecrire sous forme d'ensemble les événements suivants :
   - A :« Obtenir deux jetons de même couleur ou de même numéro »
   - B : « Obtenir deux jetons portant des numéros ayant un écart de 1 »
3. Déterminer l'évènement C : « obtenir A et B »

Méthodes

- Pour déterminer toutes les issues d'une expérience aléatoire, on peut utiliser un arbre, un tableau, etc
- Pour déterminer les issues qui réalisent un événement, on suit alors tous les chemins de l'arbe qui respectent la condition définissant cet événement.
- Pour déterminer l'intersection de deux événements A et B, on fait la liste des issues communes à A et à B.
- Pour déterminer la réunion de deux événements A et B, on fait la liste des issues réalisant soit A, soit B (soit les deux).

II) Probabilités (discrètes)

II-1 Loi de probabilités

Définition 8 :

On considère une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ (Card $\Omega = n$).
Définir une loi de probabilité P sur Ω c'est associer à chaque éventualité ω_i un nombre $p_i \in [0;1]$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque : Les nombres p_i sont les probabilités des événements élémentaires ω_i. On a $p_i = p(e_i)$.

Exemple :

On lance deux fois une pièce équilibrée. L'univers Ω est $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$ et chaque éventualité a la même probabilité $\frac{1}{4}$.

La probabilité de l'événement A « obtenir Pile et Face »= $\{PF; FP\}$ est donc $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Remarques :

- On a $P(\Omega) = 1$.
- Par convention, on pose $P(\emptyset) = 0$.
- Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$.

Définition 9 :

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité sur l'univers Ω qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Exemple :

Dans un verger, on trouve deux fois plus de pommiers donnant des pommes rouges et que de pommiers donnant des pommes vertes (et c'est tout).
On cherche la probabilité de choisir un pommier donnant des pommes Rouge.
Appelons $P(R)$ cette probabilité et $P(V)$ celle de choisir un pommier donnant des pommes vertes.
Alors on sait que $P(R) = 2P(V)$. De plus $P(R) + P(V) = 1$.
On a donc $2P(V) + P(V) = 1 \iff 3P(V) = 1 \iff P(V) = \frac{1}{3}$ et $P(R) = \frac{2}{3}$.

Exemple :

Soit un dé truqué dont les probabilités des faces d'apparitions sont donnés par le tableau suivant :

Eventualité	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,1$	$0,2$	a

1. Calculer la probabilité de l'éventualité : « le dé tombe sur 6 ».
2. Calculer la probabilité de l'événement A =« obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
3. Calculer la probabilité de l'événement B =« obtenir un nombre premier ».
4. Calculer la probabilité de l'événement C = « obtenir un nombre pair ».

Exercices du livre :

n°$3-5-7-10-11$ p 249

II-2 Loi équiprobable, équiprobabilité

Définition 10 :
Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la loi de probabilité est équirépartie.

Propriété 1 :
Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables}}{\text{nombre d'éventualités possibles}} = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}$$

Exemple :

Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité de tirer le valet de coeur est $\frac{1}{32}$.

Celle de tirer un valet est $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Celle de tirer un coeur est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Exercices du livre :

n°$12-13-14$ p 249

II-3 Quelques propriétés

Propriété 2 :
Si deux événements sont incompatibles, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités :

$$\text{Si } A\cap B=\emptyset \text{ alors } P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Preuve
Si l'un des événements A et B est l'ensemble vide, alors la relation précédente est évidente.
Dans le cas contraire, $P(A)$ est la somme des probabilités des éléments de A et $P(B)$ est la somme des probabilités des éléments de B. Puisque A et B sont disjoints, $A\cup B$ contient exactement tous les éléments de A et tous ceux de B. Par conséquent $P(A)+P(B)$ est égal à la somme des probabilités des élements de $A\cup B$, i.e $P(A\cup B)$

Corollaire 1 :
- La probabilité de l'événement contraire $\bar{A}$ de A est $P(\bar{A})=1-P(A)$.
- Si $A\subset B$, alors $P(A)\leq P(B)$

Preuve
- On a $\bar{A}\cup A=\Omega$ et $\bar{A}\cap A=\emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$1=P(\Omega)=P(\bar{A}\cup A)=P(\bar{A})+P(A)\Longleftrightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$$

- Si $A\subset B$, alors $B=A\cup(B-A)$, où $B-A$ est l'ensemble des éventualités de B qui ne sont pas dans A. On a aussi $A\cap(B-A)=\emptyset$, par conséquent d'après la propriété précédente :

$$P(B)=P(A)+P(B-A)\Longrightarrow P(A)\leq P(B)$$

Théorème 1 :
La propabilité de la réunion de deux événements A et B est :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Preuve
Il suffit d'écrire que : $A\cup B=(A-B)\cup B$ et comme $(A-B)\cup B=\emptyset$, il vient :

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)$$

Exemple :
Dans un club, plusieurs activités sont proposés dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

1. pratique le tir à l'arc ? le golf ?
2. pratique l'un au moins des deux sports ?
3. ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

Exercices du livre :
n°19 – 20 – 21 – 22 – 23 p 250

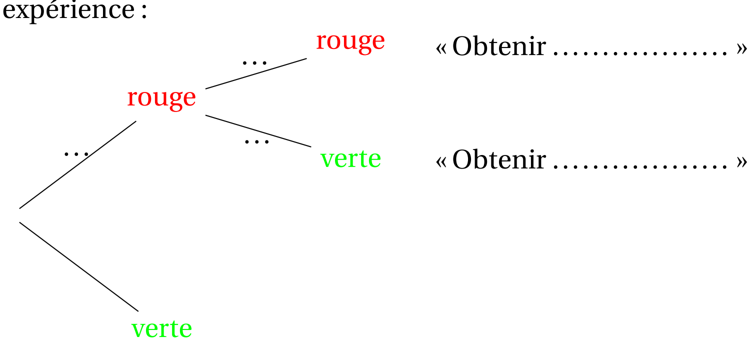
Exercices du livre :

TP tableur n°27 p 251

III) Bien utiliser les arbres de probabilité

Travail de l'élève **3.** Une urne contient 8 boules, 3 rouges et 5 vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant (branches et probabilités correspondantes), qui modélise l'expérience :



2. Calculer les probabilité des événements suivants :

– A = « Tirer deux boules rouges »
– B = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on en a tiré une au premier tirage »
– C = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a tiré une verte au premier »
– D = « Tirer une boule rouge au deuxième tirage »
– E = « Tirer une boule rouge au premier tirage »
– F = « Tirer deux boules de la même couleur »
– G = « Tirer au moins une boule vertes ?

Règle 1 : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
Règle 2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.
Cela correspond à la probabilité de l'intersection des événements qui le composent.
Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exercices du livre :

DM n°49 – 50 – 52 p 251

Exercices du livre :

DM n°60 – 62 p 259

Exercice 2 :

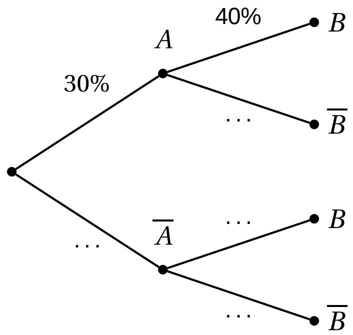
1. On lance un dé. Si le résultat est pair on tire un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3). Quelle est la probabilité que la somme dé et du jeton éventuel soit égale à 5 ?
2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire des boules de l'urne (sans remise) jusqu'à obtention d'une boule rouge. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ?

Exercice 3 :

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non. On sait que :
- 30% des dragées contiennent une amande.
- 40% des dragées avec amandes sont bleues,, les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasad une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements suivants :
- A : « la dragée choisie contient une amande »
- B : « la dragée choisie est bleue »

1. Compléter l'arbre des fréquences donnée ci-dessous



2. Quelle est la proportion de dragées bleues contenant une amande ?
3. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0.12.
4. Calculer la probabilité de l'événement B.
5. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

DAVID HILBERT, mathématicien