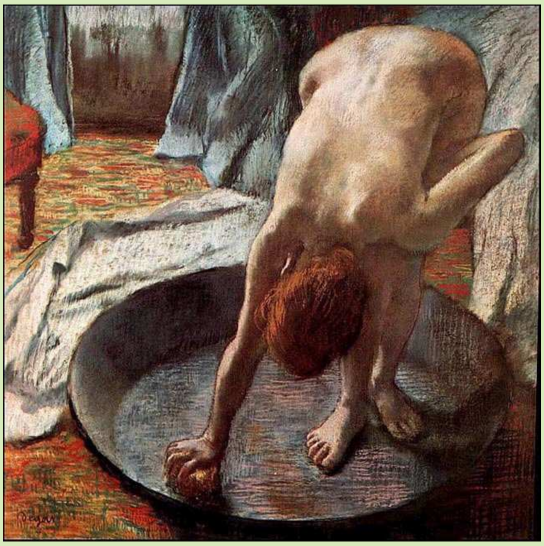
Chapitre 1

Introduction aux Fonctions

Hors Sujet



Titre : « Autoportrait (1863) » et « Le Tub (1885) »

Auteur : Edgar Degas

Présentation succinte de l'auteur : Edgar Degas (1834-1917) est un peintre français, en général rattaché au mouvement impressionniste, formé à la fin du XIXe siècle, en réaction à la peinture académique de l'époque.

Sa carrière fut dès le départ influencée par les danseuses. En 1874, il commence à se faire connaître, les critiques louant ou dénigrant le réalisme de son travail. Il explore des thèmes comme les repasseuses ou les femmes à leur toilette, multipliant les points de vue audacieux, recherchant des effets lumineux et colorés. Il dit d'ailleurs à propos de ses nus : « Jusqu'à présent, le nu avait toujours été représenté dans des poses qui supposent un public. Mais mes femmes sont des gens simples... Je les montre sans coquetterie, à l'état de bêtes qui se nettoient. »

A partir des années 1880, Degas va aussi poser la question d'une sculpture « impressionniste », réalisant des modèles en cire peints au naturel, qu'il accessoirise ensuite. Seule *La Grande Danseuse* (cf première page) fut présenté de son vivant, les autres modèles l'aidant surtout dans ses peintures. Cette incarnation de la grâce et de l'innocence trahit en réalité la fascination de Degas pour la criminalité. En effet, avec son visage est sculpté sur le modèle des physionomies de criminels définies à l'époque, et la danseuse était un parfait « petit rat », transmettant la syphilis aux bourgeois venant la voir ...

Document réalisé à l'aide de LaTeX

Auteur : C. Aupérin

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

« *Quand quelqu'un paye un tableau* $3\,000$ *francs, c'est qu'il lui plaît.*
Quand il le paye $300\,000$ *francs, c'est qu'il plaît aux autres.* »

EDGAR DEGAS

Grille d'acquisition des compétences du chapitre

A	**Numérique**	**Acquisition**				
1	Opposé, inverse, priorité de calculs					
2	Simplifier une fraction					
3	Mettre deux fractions au même dénominateur					
4	Calculer avec des fractions					
6	Calculer avec des racines					
7	Valeur exacte et approchée					
10	Intervalles					

B	**Calcul Littéral**	**Acquisition**				
1	Mettre un problème en (in)équation					
2	Développer, réduire					
3	Factoriser					
4	Identités remarquables					
5	Vérifier qu'un nombre est ou non solution d'(in)équation					
6	Résoudre une équation du 1er degré					
7	Résoudre une équation produit					
8	Résoudre une équation quotient					
9	Résoudre une inéquation du 1er degré					

C	**Algorithmie, calculatrice et logiciels**	**Acquisition**				
1	Suivre un algorithme de calcul					
4	Mener un calcul numérique à la calculatrice					
5	Afficher un tableau de valeurs à la calculatrice					
6	fficher une courbe représentative à la calculatrice					
7	Paramétrer la calculatrice					

F	**Fonctions : graphiques**	**Acquisition**				
1	Interpréter une courbe donnée					
2	Lire un ensemble de définition					
3	Lire des images					
4	Lire des antécédents					
5	Lire le signe d'une fonction					
6	Décrire les variations d'une courbe					
7	Dresser le tableau de variations					
8	Comparer des images					
9	Tracer une courbe compatible avec des informations					
10	Résoudre graphiquement des équations					
11	Résoudre graphiquement des inéquations					
12	Positions relatives de deux courbes					

G	Fonctions : calculs	Acquisition				
1	Traduire le lien entre deux quantités					
2	Trouver les valeurs interdites					
3	Tracer une courbe à partir de l'expression					
4	Calculer une image					
5	Trouver d'éventuels antécédents					

H	Fonctions de référence	Acquisition				
1	Affines : sens de variation, représentation					
2	Affines : signes					

LEÇON 1

Introduction aux Fonctions

Au fil du temps

Le concept de fonction a mis des siècles à s'établir en mathématiques. La notion intuitive comme relation entre deux objets est assez ancienne, mais il faut attendre le $XVII^e$ siècle pour qu'elle soit formalisée.

- C'est le français Pierre de Fermat (16010-1665) qui met en place la notion fondamentale d'équation d'une courbe, associant donc ainsi les fonctions à une courbe du plan, et s'intéresse aux extrema de fonctions.
  Fermat est essentiellement connu pour ses théorèmes en arithmétique, notamment pour son grand théorème, qu'il prétendit avoir démontré dans une note de bas de page, mais dont la preuve ne fut trouvée qu'en 1994.
- En 1673, l'allemand Gottfried von Leibniz (1646-1716), à la fois philosophe et mathématicien, utilise pour la première fois le mot « fonction » et introduit le vocabulaire.
  Leibniz est essentiellement connu en sciences pour avoir découvert conjointement avec Newton le calcul infinitésimal, c'est-à-dire dans l'infiniment petit.
- En 1698, le suisse Jean Bernoulli (1667-1748) reprit le terme et en donne une première définition. Il proposa alors la notation $f(x)$.
  Bernoulli développa le calcul exponentiel et la théorie des probabilités.
- Euler, mathématicien formé par Bernoulli, adopte cette notation en 1734 et définit en 1748 une fonction d'une variable comme combinaison d'opérations à partir de cette variable et de nombres constants.
  Euler travailla essentiellement sur le calcul infinitésimal lui aussi et sur la théorie des graphes (utiliser pour les GPS)

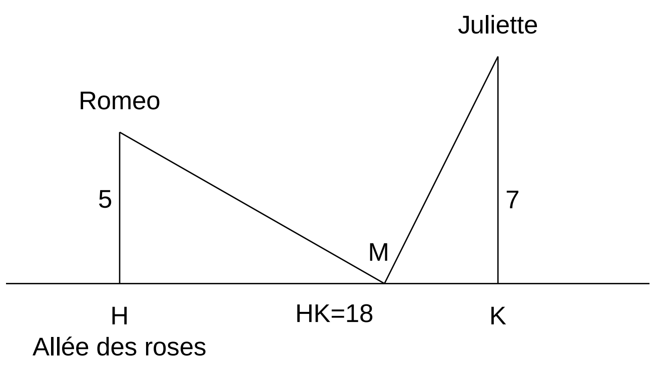
En fait, le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative en permet une étude plus approfondie. Le concept de fonction et l'étude de leur propriété a révolutionné la recherche mathématique. jusqu'à aujourd'hui.
Compte tenu du nombre incroyable d'applications en physique, en économie et dans quasiment tous les domaines, l'étude des fonctions est un des objectifs majeurs du lycée en mathématiques.

L'objectif principal de ce chapitre est de découvrire la notion de variation de fonction et de l'utiliser dans la résolution de problèmes.

I) Notion de fonction

I-1 Découverte

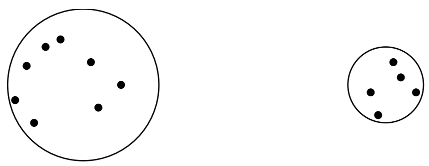
Travail de l'élève **1.** Roméo souhaite au plus vite offrir une rose fraîchement cueillie à sa Juliette. La situation est schématisée de la façon suivante :



Quel chemin doit prendre Roméo pour rejoindre Juliette le plus tôt possible ?

Définition 1 :
Une **fonction** est une relation qui associe un élément d'un ensemble de départ E à *au plus* un élément d'un ensemble d'arrivée F (donc à 0 ou 1 élément de F).

On peut illustrer ce procédé par le diagramme suivant : *Rajouter les flèches*



Ensemble de départ E Ensemble d'arrivée F

Définition 2 :
Les éléments de E auxquels f ne fait correspondre aucun élément de F sont appelées les **valeurs interdites** de f.
L'ensemble des éléments de E auxquels f fait correspondre exactement 1 élément de F est appelé **l'ensemble de défintion** de f et est noté D_f.
Si $x \in D_f$, on appelle **l'image** de x par f son élément associé dans F, et on le note $f(x)$. Quand on sait que $y \in F$ est l'image d'un certain $x \in D_f$, c'est-à-dire que $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y par f.

Exemples :

– Le périmètre d'un cercle est la fonction qui à tout nombre positif R associe le nombre $\mathscr{P}(R) = 2\pi R$.

On a $D_{\mathscr{P}} = \mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$ et $F = \mathbb{R}^+$. On pourra noter : $\begin{array}{cccc} \mathscr{P}: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & R & \longmapsto & 2\pi R \end{array}$.

En fait, on ne cherchera jamais à donner l'ensemble d'arrivée exact, et on se contentera de dire $F = \mathbb{R}$, pour préciser qu'on obtient un nombre.

– L'aire d'un triangle est la fonction qui à tout couple de réels positifs $(b;h)$ associe le réel $\mathscr{A}(b;h) = \dfrac{b \times h}{2}$

On a $D_{\mathscr{A}} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $F = \mathbb{R}$. On pourra noter $\begin{array}{cccc} \mathscr{A}: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (b,h) & \longmapsto & \dfrac{b \times h}{2} \end{array}$

– Le chemin le plus court d'un lieu vers un autre qui à tout couple de lieux $(A;B)$ associe un itinéraire :

$$\begin{array}{cccc} \text{chemin}: & \text{Lieu} \times \text{Lieu} & \longrightarrow & \text{Phrases} \\ & (A,B) & \longmapsto & \text{Itinéraire le plus court de } A \text{ à } B \end{array}$$

Remarque : Cette année, nous étudierons les fonctions qui transforment un nombre en un autre, c'est-à-dire celles où l'ensemble de définition est une partie de $\mathbb{R}$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. On parle de fonction **numérique à une variable**.

Exemple :

La fonction r qui à tout entier naturel n associe son reste dans la division euclidienne par 4 :

$$\begin{array}{ccl} r: \quad \mathbb{N} & \longrightarrow & \{0,1,2,3\} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 4k+1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{si } n = 4k+2 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \\ 3 & \text{si } n = 4k+3 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

L'image de 5 par r est 1, ou encore $r(5) = 1$. De même on a $r(9) = 1$, $r(21) = 1$ ...
En fait 1 a une infinité d'antécédent par r.

Exemple :

Soit l la fonction qui à tout réel x associe le réel $l(x) = \dfrac{4}{2x-3}$ quand il existe.
Ce nombre existe à partir du moment où l'on ne divise pas par 0.
Or on divise par 0 si et seulement si $2x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$. La seule valeur interdite est $\dfrac{3}{2}$. On peut écrire :

$$\begin{array}{ccc} l: &]-\infty;1.5[\cup]1.5;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \dfrac{4}{2x-3} \end{array}$$

L'image de 2 par l est le nombre $l(2) = \dfrac{4}{2\times 2-3} = \dfrac{4}{1} = 4$. L'image de 4 par l est $l(4) = \dfrac{4}{5}$.
2 est donc un antécédent de 4, mais pas forcément le seul.
Pour tous les trouver, on doit résoudre l'équation $\dfrac{4}{2x-3} = 4$ pour $x \neq \dfrac{3}{2}$.
Or $\dfrac{4}{2x-3} = 1 \iff 4 = 4(2x-3) \iff 8x = 4+12 \iff x = 2$.
Donc 2 est bien le seul antécédent de 4 par l.

Exemple :

Soit la fonction f qui à tout réel x associe le réel $f(x) = 5x+3\sqrt{x+2}$ quand il existe.
Ce nombre existe à partir du moment où le nombre sous la racine est positif, donc $f(x)$ existe si et seulement si $x \geq -2$. On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} f: & [-2;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto 5x+3\sqrt{x+2} \end{array}$$

L'image de 7 par f est le nombre $f(7) = 5\times 7+3\sqrt{7+2} = 35+3\sqrt{9} = 35+3\times 3 = 44$.
On sait alors que 7 est un antécédent de 44 (mais pas forcément le seul). Pour tous les trouver, on doit résoudre l'équation $5x+3\sqrt{x+2} = 44$, qui est trop compliquée à notre niveau.

Remarques :

- Chaque élément $x \in D_f$ a une et une seule image, qui se trouve en comptant.
- Chaque élément $y \in F$ peut avoir plusieurs antécédents, ou même ne pas en avoir, ce qui se trouve en résolvant une équation.
- On trouve les valeurs interdites en appliquant les deux règles suivantes :
  1. On ne divise pas par zéro
  2. On ne prend pas racine d'un nombre strictement négatif

Exercice 1 **:**

Soit la fonction f définie qui à tout réel x associe le réel $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{x}$ quand il existe.

1. Calculer $f(-2)$.
2. Calculer l'image de 3.
3. Pourquoi l'image de 0 par f n'existe-t-elle pas ? En déduire l'ensemble de définition de f.

Exercice 2 **:**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. La fonction f admet-elle des valeurs interdites ? En déduire sont ensemble de définition D_f.
2. Déterminer l'image des réels 0 ; $-\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$ par f.
3. Déterminer les éventuels antécédents de 3 par f.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = (x-1)^2 + 2$.
5. En utilisant cette dernière écriture, déterminer les éventuels antécédents de 2 et de -4 par f.

Exercices du livre :

n° 28 p 30 + 61 p 55

I-2 Algorithmie

Définition 3 :
Un **algorithme** est une suite d'instructions, qui, une fois exécutée correctement, conduit à un unique résultat.

Exemple :
Indiquer un itinéraire allant d'un lieu à un autre.

Remarques :
- Pour fonctionner, un algorithme doit contenir uniquement des instructions compréhensibles par celui qui devra l'exécuter
- En mathématiques, les algorithmes consistent par exemple en des suites d'opérations à effectuer (pour les fonctions notamment), ou des suites de manipulations à faire (pour construire une figure géométrique).
  On considère pour acquises les connaissances du collège, et l'on pourra donc les utiliser comme instructions.
- On peut alors voir une fonction numérique comme une machine, dans laquelle on introduit un nombre et en ressort un nombre transformé ou modifié, suivant un algorithme de calcul donné.

Nombre x	——	Machine f	——	Nombre transformé $f(x)$
Antécédent		Fonction		Image

Exemple :
Considérons la machine f qui retranche 3 et élève au carré.
- Si on rentre le nombre 4, il en ressort 1, ou encore l'image de 4 par f est 1, ou encore $f(4) = 1$
- Si on rentre le nombre 0, il en ressort 9, ou encore l'image de 0 par f est 9, ou encore $f(0) = 9$
- Si on rentre 3, il en ressort 0, ie l'image de 3 par f vaut 0, ie $f(3) = 0$.
- Si on rentre $\sqrt{2}$, il en ressort $(\sqrt{2}-3)^2$, ie $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-3)^2$.
- Si on rentre x, il en ressort $(x-3)^2$, ie $f(x) = (x-3)^2$.

Ici, on a décrit la fonction numérique

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-3)^2 \end{array}$$

par l'algorithme calculatoire : $x \longmapsto x-3 \longmapsto (x-3)^2$.
Un antécédent de 1 par f est 4. Pour tous les trouver, on doit résoudre $f(x) = 1$. Or

$$\begin{aligned} (x-3)^2 = 1 &\iff x-3 = 1 \text{ ou } x-3 = -1 \\ &\iff x-3 = 1 \text{ ou } x-3 = -1 \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Un antécédent de 0 par f est 3. On peut vérifier que c'est le seul en résolvant l'équation $(x-3)^2 = 0$.
Par contre, -1 n'a pas d'antécédent par f, car l'équation $(x-3)^2 = -1$ n'a pas de solutions.

Exercice 3 :

On choisit un nombre, on lui ajoute 4, on élève le résultat au carré, on retranche 16 et on divise le tout par le nombre de départ.

Quelle est la fonction $blop$ décrite par cet algorithme ? Quelle est l'image de 4 ? Que vaut $blop(0)$?

Exercice 4 :

Soit la fonction $g: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2-3 \end{array}$.

Décrire l'algorithme correspondant à la fonction g.

Déterminer l'image de 3, puis celle de -1 par la fonction g.

Déterminer les antécédents éventuels de 7, de -3 et de -4 par la fonction g.

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  fx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  fx PREND_LA_VALEUR sqrt(2*x)+5
  AFFICHER fx
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 5 :

Décrire la fonction associée à l'algorithme ci-contre :

Exercice 6 :

Ecrire un algorithme permettant de déterminer les antécédents de n'importe quel nombre réel y par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x+1$

Exercices du livre :

Hyperbole : 7-9 p 46 + 45 p 52

II) Représentation graphique

II-1 Définition

On peut associer à une fonction un tableau de valeurs (que l'on trouve à la calculatrice). Il comporte deux lignes, la première regroupe les antécédents x et la seconde les images $f(x)$ correspondantes.

On peut alors placer les points de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan.

Définition 4 :

La **représentation graphique** $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où x parcourt D_f.

Autrement dit : $M(x; y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) = y. \end{cases}$

On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère choisi.

Exemple :

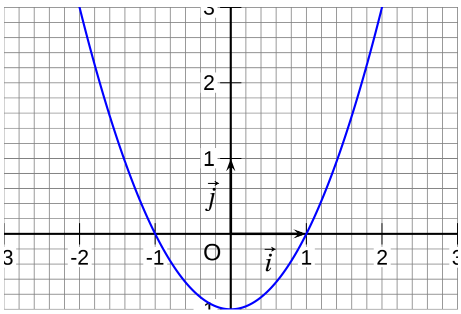
Dessin Déclic p 18

Exemple :

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x^2 - 1$. Compléter le tableau de valeurs suivant :

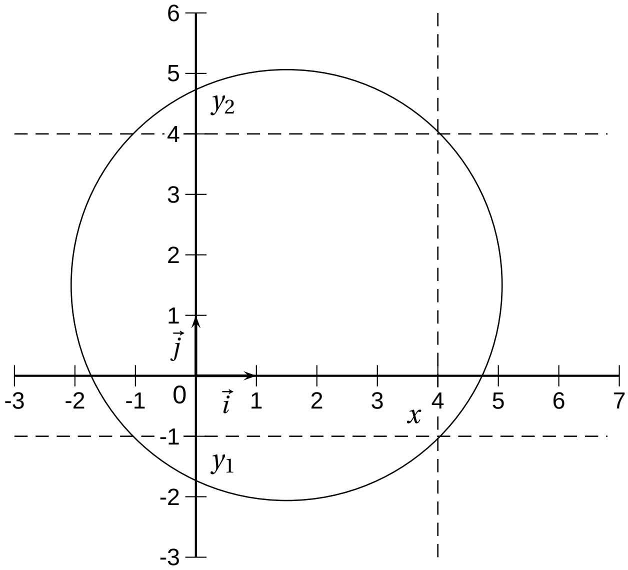
x	-3	2	0	-1	7	1,5	4
$d(x)$							

Représenter dans un repère orthonormé les points de coordonnées $(x; d(x))$.
Imaginer alors l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_d$ de la fonction d.
Le point $A(1;0)$ appartient-il à $\mathscr{C}_d$? Et le point $B(0.5;-0.7)$?



Remarque : Pour tracer la courbe représentative d'une fonction, on relie les points du tableau de valeurs avec le plus de cohérence possible. On prendra toujours un tableau avec au moins 10 valeurs et on consultera le tracé de la courbe sur la calculatrice pour s'aider.
Néanmoins, on ne sait pas exactement comment varie la fonction entre deux points de la courbe.

Remarque : Toutes les courbes ne représentent pas des fonctions. On s'appuie sur la définition pour le comprendre. En effet, un élément ne peut avoir plusieurs images.



Remarque : Pour obtenir un tableau de valeurs (et la courbe représentative d'une fonction) à la calculatrice graphique :

– On rentre la fonction considérée dans $Y =$ OU dans Menu + Graph.

– On règle les paramètres du tableau de valeurs (première, dernière valeur de x et pas) dans le menu Table + Tblset (jaune + F4) OU Menu + Table + F5, :

Start=..., End=..., Pitch=... (sur Casio)

TblStart=..., ΔTbl=... (sur TI)

– On affiche le tableau dans le menu Graph
– On affiche la courbe représentative dans le menu Trace

Exemples :

Tracer les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$, $g(x) = 2x+1$ et $h(x) = -2x+1$.

Exercices du livre :

n° 10 à 12 p 47 + 62 p 55

II-2 Lecture graphique

Travail de l'élève **2.** Déclic p 14 : Exploiter une courbe.

Méthodes pour déterminer graphiquement

– **Un ensemble de définition** : On déterminer l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe représentative.
Puis on le décrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles, en faisant attention aux bornes (crochets ouverts ou fermés).
– **L'image** $f(a)$ d'un réel a : On place sur la courbe le point d'abscisse a et on lit son ordonnée.
– **Les éventuels antécédents** d'un réel b : On place sur la courbe tous les points éventuels d'ordonnées b (on peut pour les mettre en évidence, tracer la droite horizontale d'équation $y = b$) et on lit leur abscisses.

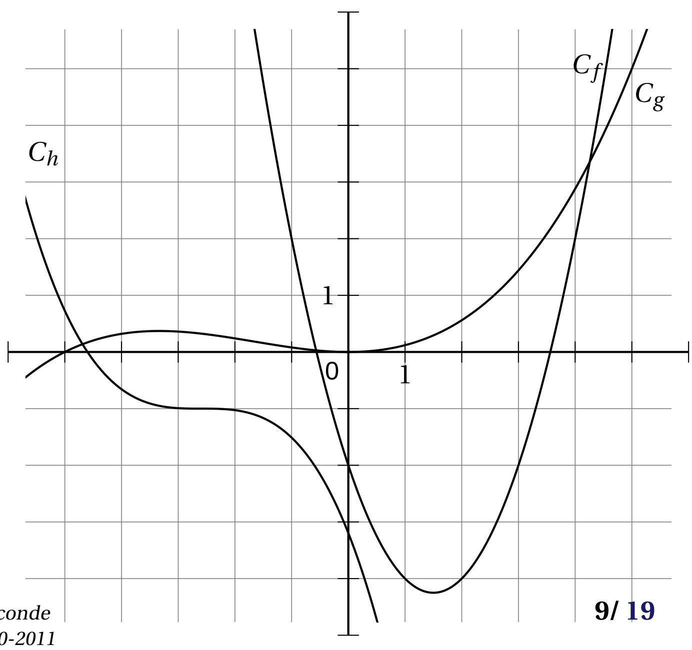
Exercices du livre :

n° 3 + 6 + 17 p 46

II-3 Résolution graphique

Travail de l'élève **3.** Soient f, g et h trois fonctions définies par le graphique ci-contre :
Résoudre :

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = h(x)$
3. $f(x) = g(x)$
4. $g(x) = h(x)$
5. $f(x) < 2$
6. $g(x) \geq 1$
7. $f(x) \geq h(x)$
8. $f(x) < h(x)$



Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = k$

On trace la courbe $\mathscr{C}_f$, et la droite d d'équation $y = k$, représentative de la fonction affine constante défnie par $g(x) = k$.

Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et d.

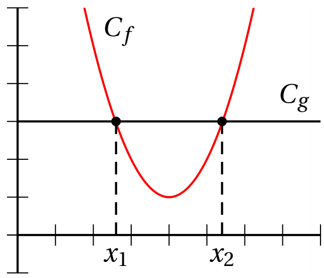
Remarque : Déterminer sur un intervalle I les solutions de $f(x) = k$ revient à trouver tous les antécédents de k appartenant à I.

Exemple :

Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x-4)^2+1=3$$

On trace la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-4)^2+1$ et la droite d'équation $y = 3$.
On trouve $S = \{x_1; x_2\}$



Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$

On trace sur I les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

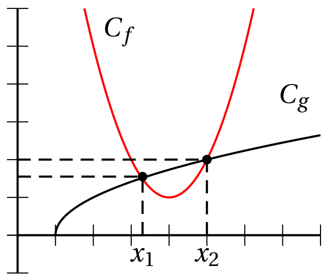
Les solutions de l'équation sont alors les abscisses des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exemple :

Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'équation

$$(x-4)^2+1=\sqrt{x+1}$$

On trace les courbes représentatives des fonctions $f : x \to (x-4)^2+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \to \sqrt{x+1}$ définie sur $[-1;+\infty[$.
On trouve $S = \{x_1; x_2\}$



Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) < k$

Pour résoudre cette inéquation graphiquement, on trace la courbe $\mathscr{C}_f$, et la droite d d'équation $y = k$, représentative de la fonction affine constante défnie par $g(x) = k$.

Les solutions de l'équation sont les abscisses des éventuels points de $\mathscr{C}_f$ se trouvant au dessous de d.

Méthode pour résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$

On trace sur I les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Les solutions de l'inéquation sont alors les abscisses des éventuels points de C_f se trouvant au-dessous de C_g.

Exemple :

En prenant les deux exemples ci-dessus, on trouve $S =]x_1; x_2[$ dans les deux cas.

Exercices du livre :
n° 13 à 16 p 47 + 29 p 49 + QCM et Vrai-Faux p 54 + n° 58 à 60 p 55

III) Variations

IV) Les fonctions affines

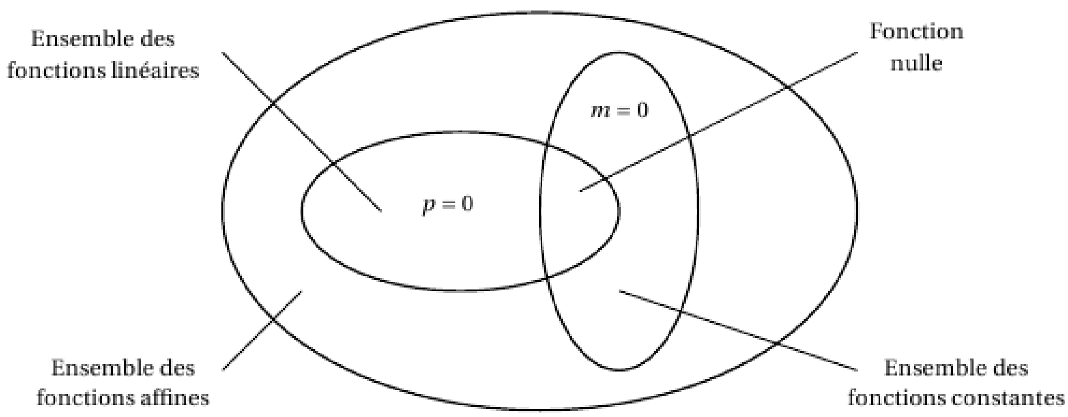
IV-1 Définition

Définition 5 :
Soient a et b deux réels.
On appelle fonction affine toute fonction dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = ax + b$.

Propriété 1 :
L'expression algébrique d'une fonction affine ne comporte ni quotient, ni racine.
Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.

Exemples :
Les fonctions $f : x \mapsto 3x+2$, $g : x \mapsto -\pi x + \frac{2}{3}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto 3$ sont affines.
Les fonctions $l : x \mapsto 3x^2+2$ et $m : x \mapsto \frac{3}{x}+2$ ne le sont pas.

La famille des fonctions affines contient donc celles des fonctions constantes ($a = 0$) et des fonctions linéaires ($b = 0$). On peut représenter la situation par un diagramme "en patate" :



Exemple :
Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$.
f est une fonction affine ce qui équivaut à dire qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. On a :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 + b = 2 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ -2a + (2-a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ -3a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 2$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto x + 1$

Exercice 7 :

Déterminer la fonction affine f telle que $f(-2)=9$ et $f(3)=-11$.

IV-2 Ordre des images en fonction de celui des antécédents, et réciproquement

Propriété 2 :

Soit f la fonction affinie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.

1. Si $a<0$, alors f inverse l'ordre $\mathbb{R}$
2. Si $a=0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$
3. Si $a>0$, alors f est conserve sur $\mathbb{R}$

Preuve

Soient x et y deux réels tels que $x<y$. On cherche à savoir si $f(x)=ax+b$ et $f(y)=ay+b$ sont dans le même ordre.

$$\begin{array}{cc}
 & x<y \\
\overset{\times a>0}{\Longleftrightarrow} & ax<ay \\
\overset{+b}{\Longleftrightarrow} & ax+b<ay+b \\
\Longleftrightarrow & f(x)<f(y)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & x<y \\
\overset{\times a=0}{\Longrightarrow} & ax=ay=0 \\
\overset{+b}{\Longleftrightarrow} & ax+b=ay+b=b \\
\Longleftrightarrow & f(x)=f(y)=b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & x<y \\
\overset{\times a<0}{\Longleftrightarrow} & ax>ay \\
\overset{+b}{\Longleftrightarrow} & ax+b>ay+b \\
\Longleftrightarrow & f(x)>f(y)
\end{array}$$

Exercice 8 :

On donne les fonctions f, g et h définies par $f(x)=-3x-\dfrac{5}{8}$, $g(x)=-\pi x+1$ et $h(x)=87\,968x-\sqrt{5\,468}$.

1. Donner, sans calculatrice, l'ordre des images des nombres :

   a. 1 et 5

   b. $\sqrt{364}$ et $-\pi$

   c. $-\dfrac{45}{987}$ et $-\dfrac{45}{65498}$

   d. $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$

   e. $-\dfrac{45}{987}$ et $-\dfrac{45}{65498}$

2. Donner, sans calculatrice, l'ordre des antécédents des nombres :

   a. $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{15}$

   b. $\dfrac{12}{45}$ et $\dfrac{15}{39}$

   c. $\sqrt{180}$ et $2\sqrt{98}$

   d. $\dfrac{3^4\times5^{13}\times3^3}{15^7}$ et $\dfrac{5^3\times5^5\times3^{10}}{15^{10}}$

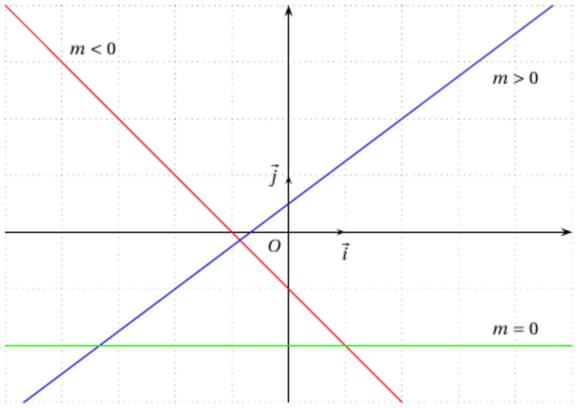
IV-3 Représentation graphique

Propriété 3 :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y=mx+p$. m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Preuve

Admis pour l'instant



Propriété 4 :

Soit un fonction affine f telle que $f(x) = ax + b$ représentée par la droite $\mathscr{D}$.. L'ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres réels distincts, on a :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou encore si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de $\mathscr{D}$ on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Preuve

On note M le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe (Oy). Alors on a $x_M = 0$ et $y_M = f(x_M)$. Donc

$$y_M = f(0) \Leftrightarrow y_M = 0 \times a + b \Leftrightarrow y_M = b$$

Soient $x_1 \neq x_2$. Alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) - ax_1 = b \\ f(x_2) - ax_2 = b \end{array} \right.$$

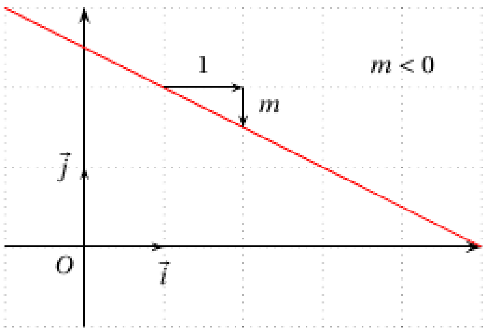
$$\Longrightarrow f(x_1) - ax_1 = f(x_2) - ax_2 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = ax_1 - ax_2 \Longleftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$$

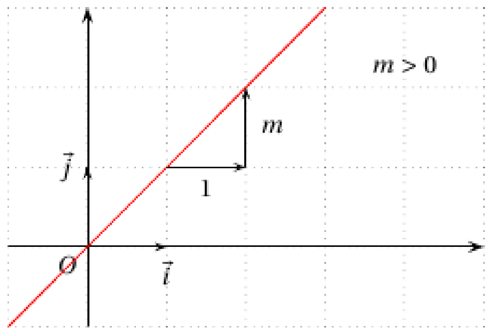
$$\Longleftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a \Longleftrightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Le principe est le même pour les points A et B en raisonnant sur les coordonnées, puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.

Conséquence : Interprétation graphique du coefficient directeur

Si on choisit deux points A et B tels que $x_B - x_A = 1$ alors $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = y_B - y_A$.





IV-3.1 Algorithme de tracé

Traiter l'exemple d'une fonction affine définie par morceaux.

IV-4 Signe d'une fonction affine

Combiner les deux façons ...

<u>Travail de l'élève</u> **4.** On cherche à connaître le signe de différentes expressions du type $ax+b$.

1. Etude du signe de $2x-3$:
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3=0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3<0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3>0$
- Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$		0	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x-4$

3. Cas général : Étudier le signe de $ax+b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

Propriété 5 :
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ avec $a \neq 0$.
Alors $f(x)=0$ pour $x=-\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

Preuve

Si $a > 0$ (on raisonne de même si $a < 0$) :

$$\begin{array}{lll} & ax+b=0 \\ \overset{-b}{\Longleftrightarrow} & ax=-b \\ \overset{\times\frac{1}{a}}{\Longleftrightarrow} & x=-\dfrac{b}{a} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & ax+b>0 \\ \overset{-b}{\Longleftrightarrow} & ax>-b \\ \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\Longleftrightarrow} & x>-\dfrac{b}{a} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & ax+b<0 \\ \overset{-b}{\Longleftrightarrow} & ax<-b \\ \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\Longleftrightarrow} & x<-\dfrac{b}{a} \end{array}$$

Exercice 9 :

Établir le tableau de signe des fonctions affines f, g et h définies par $f(x) = 5x-3$, $g(x) = -\pi x+1$ et $h(x) = \frac{1}{2}x+4$

Exercice 10 :

Un ticket de bus coûte 1.20€. On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30€ ; le trajouet coûte alors 1€.

1. On note x le nombre de trajets en bus effectufés dans l'année.
   Donner l'expression de la fonction :
   – f qui à x associe le prix total sans abonnement
   – g qui à x associe le prix total avec abonnement
2. Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?
3. A partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ?

Plus complet ....

V) Signe d'une expression

Peut être fait ici ou dans le chapitre suivant sur les fonction affines

V-1 Signe d'un monôme (expression du type $ax+b$, a et b deux nombres réels)

Travail de l'élève **5.** On cherche à connaître le signe de différentes expressions du type $ax+b$.

1. Etude du signe de $2x-3$:
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3=0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3<0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x-3>0$
- Consigner ces résultats dans ce tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x-3$		0	

2. Mêmes questions pour l'expression $-3x-4$

3. Cas général : Étudier le signe de $ax+b$ où a et b sont des réels et $a \neq 0$

Propriété 6 :

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$.

Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$ et

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

Preuve

Si $a > 0$ (on raisonne de même si $a < 0$) :

$$\begin{array}{lll} ax+b=0 & ax+b>0 & ax+b<0 \\ \overset{-b}{\Longleftrightarrow} ax=-b & \overset{-b}{\Longleftrightarrow} ax>-b & \overset{-b}{\Longleftrightarrow} ax<-b \\ \overset{\times\frac{1}{a}}{\Longleftrightarrow} x=-\dfrac{b}{a} & \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\Longleftrightarrow} x>-\dfrac{b}{a} & \overset{\times\frac{1}{a}>0}{\Longleftrightarrow} x<-\dfrac{b}{a} \end{array}$$

Exercice 11 :

Établir le tableau de signe des fonctions affines f, g et h définies par $f(x) = 5x-3$, $g(x) = -x+1$ et $h(x) = \frac{1}{2}x+4$

Exercice 12 :

Un ticket de bus coûte 1.20€. On peut aussi prendre un abonnement annuel de 30€ ; le trajouet coûte alors 1€.

1. On note x le nombre de trajets en bus effectufés dans l'année.
   Donner l'expression de la fonction :
   – f qui à x associe le prix total sans abonnement
   – g qui à x associe le prix total avec abonnement
2. Donner l'expression réduite de $h(x) = f(x) - g(x)$. Que représente $h(x)$?
3. A partir de combien de trajets effectués dans l'année l'abonnement est-il intéressant ?

V-2 Signe d'un produit et d'un quotient de monômes

On connait déjà le signe d'un carré, d'un inverse ou de n'importe quelle expression du type $ax+b$.
Grâce à la règle des signes dans une multiplication (ou une division), on peut alors trouver le signe d'un produit comme d'un quotient d'expressions de ce type.
On utlise pour cela un grand tableau de signes, dans lequel on fait figurer les éventuelles valeurs interdites.

Exemple :

Pour étudier le signe de $P(x) = (2x+1)(-x+2)$, on dresse un tableau de signe avec une ligne par facteur :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(2x+1)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :
– $P(x) > 0$ ssi $x \in \left]-\frac{1}{2};2\right[$
– $P(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$
– $P(x) = 0$ ssi $x \in \left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

On sait ainsi que les solutions de l'inéquation $P(x) < 0$ est $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]2;+\infty[$

Exercice 13 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x+4)(-2x+1) \geq 0 \qquad (x+3)(x^2+3) \leq 0 \qquad (3-x)(2+x)(1-x) < 0$$

Exemple :

Pour étudier le signe de l'expression $Q(x) = \dfrac{3-x}{4x-1}$ on commence par trouver les éventuelles valeurs interdites.

VI : $4x-1 \neq 0 \iff x \neq \dfrac{1}{4}$.

Ensuite on procède comme dans l'exemple précédent.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3-x}{4x-1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Exercice 14 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-x+5}{-4-2x} > 0 \qquad \frac{(1+x)^2}{1-2x} \leq 0 \qquad \frac{(x^2+1)(x-2)}{(3-2x)} > 0$$

Méthode de résolution d'inéquations

Toutes les étapes ne sont pas nécessaires

- Trouver les valeurs interdites pour l'inconnue
- Tout faire apparaître dans le même membre
- Mettre au même dénominateur le membre non nul
- Factoriser le membre non nul
- Dresser son tableau de signe
- Donner l'ensemble des solutions

Exercice 15 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(x-2)(3x-4) \geq (x-2)(2x+6) \qquad (x-2)^2 \leq 9 \qquad (x+3)^2 < (2x+1)^2 \qquad \frac{4-x}{8-x} \geq \frac{1-3x}{8-x}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq 4 \qquad \frac{25-x^2}{3x+2} > 0 \qquad \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)} \leq 0$$

.

Il faut avoir une haute idée, non pas de ce qu'on fait, mais de ce qu'on pourra faire un jour ; sans quoi ce n'est pas la peine de travailler.